

面向21世纪课程教材



普通高等教育“九五”
国 家 级 重 点 教 材

面 向 21 世 纪 课 程 教 材
Textbook Series for 21st Century

流体力学

（第二版） 上 册

周光坰 严宗毅 许世雄 章克本 编著





高 等 教 育 出 版 社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书是教育部"高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划"的研究成果，是面向21世纪课程教材和普通高等教育"九五"国家级重点教材．全书分上、下两册出版，本书为上册．内容包括：绪论，讲述流体力学的研究对象、发展简史及研究方法；第一章，流体的物理性质和流体运动物理量的描述；第二章，流体的平衡；第三章，流体运动的基本方程组；第四章，流体的积分关系式及其应用；第五章，流体的涡旋运动；第六章，无粘性不可压缩流体的无旋运动．每章后附有实验中的发现，共十篇．

本书不仅可作为理工科力学、工程热物理、空气动力和地球物理等专业本科生流体力学基础课的教材，而且还可作为土木、化工、水利、热能、机械和环保等有关专业研究生流体力学课的教材或参考书．

图书在版编目(CIP)数据

流体力学．上册/周光垌等编著．—2版．—北京：高等教育出版社，2000

ISBN 7-04-007888-0

Ⅰ.流…　Ⅱ.周…　Ⅲ.流体力学　Ⅳ.035

中国版本图书馆CIP数据核字（1999）第56377号

流体力学(第二版)上册

周光垌　严宗毅　许世雄　章克本　编著

出版发行　高等教育出版社

社　　址　北京市东城区沙滩后街55号　　邮政编码　100009

电　　话　010-64054588　　传　　真　010-64014048

网　　址　http://www.hep.edu.cn

经　　销　新华书店北京发行所

印　　刷　国防工业出版社印刷厂

纸张供应　山东高唐纸业集团总公司

开　　本　787×960　1/16　　版　　次　1993年1月第1版

印　　张　23.25　　　　　　　　　　　2000年6月第2版

字　　数　430 000　　印　　次　2000年6月第1次印刷

定　　价　19.70元

上 册 目 录

第二版前言

进入20世纪50年代以后，随着生产的发展和科学技术的进步，流体力学的研究方向与应用范围有了明显的转变和扩大，考虑到这一特点和当前我国流体力学教材中普遍存在的一些不足，作者期望此书能在下述几个方面有所改进：一是增强读者对现象、概念、假定和结论等的物理理解，为此，除了加强物理方面的阐述外，还增加了不少例题、照片、教学录相和教学软件(需要者可与北京：海淀北京大学音像出版社二部联系，邮编100871). 二是提高读者解决实际问题的能力，为此，详细地讲解了流体力学中的积分方法，补充了有关流体力学应用的知识，特别是详细列举了大量生产中的实际例子. 三是更新流体力学内容，主要是结合生产与学科的发展，增加了流体的对流传热、传质问题，使本书成为一本全面系统讲授流体三种(动量、热量和质量)输运现象的教材.

当前流体力学的另一个显著特点为：无论是从新领域中提出的生产问题，抑还是在旧领域中存在的基本问题(如湍流、涡旋动力学、流动稳定性和层流向湍流过渡等)都比较复杂，难于从理论上解决，这就要求流体力学工作者在思想上提高认识，在心理上树立信心，和在智能上同时熟练掌握分析，实验与数值计算三种方法和不断学习更多更新的知识与技能，为克服这些困难，迎接到来的挑战做好充分准备. 虽然，流体力学实验与数值计算一般均已单独设课，但本课程是流体力学的主力课程，在彼此互不重复的情况下，有责任使读者对这一新特点有正确的认识和全面的了解. 为此，对本书第一版的内容作了进一步的更新，增减和调整使其能成为一本体现三种方法并重的教材.

自1997年秋季开始，全国各高等院校实行双休日制，流体力学的教学时间由原来的140(或100)学时缩减为120(或80)学时，为了适应这些新特点和新情况，这次增订与第一版相比主要作了如下更动：

(1) 进一步更新内容和重写流体力学发展简史，层流向湍流边界层过渡，湍流的统计理论与模式理论简介和第三章的一部分内容，另外还增加了莫里森公式及其应用，回顾与展望，结束语和与流体实验和数值计算有关的内容(详情见下).

(2) 删去了部分有粘性与无粘性流动的内容如表面张力波，浅水波中的特征线法沿曲壁的层流速度与温度边界层，具有摩擦或加热的圆管流动等节和共形映射法与无粘空间轴对称流动中的大部分内容.

(3) 将部分内容改排小号字，并注以 * 号，作为选读材料，如表面张力与毛细现象，大气的平衡，用熵和焓表示的能量方程，施瓦茨－克里斯托弗尔变换及其应用，斯托克斯流数值解简介和污染物在大气中的扩散等节.

(4) 将原粘性流体运动与边界层理论两章重新组合为层流与湍流流动两章.

(5) 增加或改用数值计算结果，如给出了几个典型涡旋运动的数值结果，并与相应的实验结果作了对比，其中包括绕长方形柱体、圆柱、倾斜平板和圆管突然扩大等流动中所出现的脱体涡. 对绕半无穷平板流动也增加了它的 N－S 方程组的数值解.

(6) 增加实验内容如剪切湍流的拟序运动和实验中的发现等节.

(7) 适当削减例题，调整习题和部分附录，并将习题分为基本部分与提高部分，后者用 * 号标出等.

(8) 为了密切结合教学，重新编制了教学录相，大大地充实了内容，并增加了不少著者自己开发的教学软件.

本书所用术语均尽量与全国自然科学名词审定委员会已公布的相一致，如

原用	压力	气体分子运动论	音速	脉动速度	粘性系数	特征值
现用	压强	气体动理学理论	声速	涨落速度	粘度系数	本征值

在本书的讲解和计算中一律采用国际单位制(Systéme International d'Units 或缩写为 SI Units)，它的基本单位和与流体力学有关的各主要导出单位的量名，单位和符号等请见附录(C).

本书是集体编写的，各作者的分工如下：周光坰(北京大学)：前言、本教材使用说明、绪论、第四与十一章、第八章的 8.7—8.14 节、第九章的 9.7—9.16 节、实验中的发现、回顾与展望、结束语和附录(A)(B)(C)(D)(I)(J)(K)；严宗毅(北京大学)：第二章、第八章的 8.1—8.6 和第九章的 9.1—9.6；许世雄(复旦大学)：第五、六、十章和附录(F)(G)(H)；章克本(中山大学)：第一、三、七章和附录(E). 最后，由周光坰负责定稿.

卞荫贵(中国科学院)、舒玮(天津大学)、王振东(天津大学)、殷有泉(北京大学)、章本照(浙江大学)、于年才(北京大学)和王保国(清华大学)等教授对本书提出过许多宝贵的修改意见和建议，舒玮和王振东二教授还无偿地提供了大量教学录相资料，特在此表示衷心的感谢.

本书中的部分例题和习题是从附录(A)参考书或其他同类教材中引用的，

特在此向有关作者和出版社致谢.

由于作者的水平有限,不妥与谬误之处在所难免,恳请广大读者及专家给予批评指正.

作　　者

1999年10月

第一版前言

进入本世纪50年代以后，随着生产的发展，流体力学的研究方向与应用范围有着明显的转变和扩大．考虑到这一特点，本书是根据原理工科力学系流体力学基础课教学大纲加以适当修改和补充后编写的．作者期望此书能在三个方面有所改进；一是增强读者对现象、概念、假定和结论等的物理理解．为此，除了加强物理方面的阐述外，还增加了不少例题、照片和录相影片．二是提高读者解决实际问题的能力．为此，补充了许多有关应用流体力学的知识，特别是详细讲解了大量生产中的实际例子．三是更新流体力学内容．主要是结合生产与学科的发展，增加了流体的对流传热，传质问题，使本书成为一本全面系统讲授流体三种(动量、热量和质量)输运现象的教材．

全书共分11章，总的计划教学时间为140小时，平均每学时约阅读4 000字．具体的时间分配如下：

章次	绪论	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
计划学时	4	16	6	12	8	10	20	10	18	18	10	8

根据这些内容和安排，本书不仅可作为理工科力学，工程热物理，空气动力和地球物理等专业本科生流体力学基础课的教材，而且还可作为土木、化工、水利、热能、机械和环保等有关专业研究生流体力学课的教材或参考书．此外，也可根据教学需要，选取书中的部分章节作为选修课教材．例如取1,3,8,9章与1,3,5,6,7章可分别组成粘性流体(约62学时)与无粘性流体(约68学时)课教材．又如取2,4,10章与1,3,8,9章的部分内容可组成工程应用性较强的流体力学教材等．加*的节可作选用．

本书所用术语将尽量与全国自然科学名词审定委员会已公布的相一致，如

原用	压力	气体分子运动论	音速	速度剖面	脉动速度
现用	压强	气体动理学理论	声速	速度廓线	涨落速度
原用	状态方程	状态参数	粘性系数	特征值	
现用	物态方程	(物)态参数	粘度系数	本征值	

等等．

在本书的讲解和运算中一律采用国际单位制(Systéme International d'Units 或缩写为 SI Units),它的基本单位和与流体力学有关的各主要导出单位的量名,单位和符号等请见附录 C.

在教学过程中,为了加深读者对内容的直观理解,建议采用天津大学力学系译制的流体力学教学录相带(可向该系直接联系选购). 具体内容与使用方法请见附录 A.

本书是集体编写的各作者的分工如下:周光坰(北京大学)编写绪论,4,9,11 章和附录(A)(B)(C)(D),(H)(I)(J);严宗毅(北京大学)编写 2,8 章;许世雄(复旦大学)编写 5,6,10 章和附录(F)(G),和章克本(中山大学)编写 1,3,7 章和附录(E). 最后,由周光坰负责定稿.

孙天风(北京大学)、徐燕侯(中国科技大学)、茅春浦(上海交通大学)、章本照(浙江大学)、王振东(天津大学)、李国钧(华中理工大学)、张涤明(中山大学)和金希卓(吉林大学)等教授对本书提出过许多宝贵的修改意见,特在此表示衷心的感谢.

本书中的部分例题和习题是从附录(A)(在下册中)的参考书和其它教材中引用的. 在此,特向有关作者致谢.

由于作者的水平有限,不妥与谬误之处在所难免,恳请广大读者及专家给予批评指正.

作　者

1991 年 12 月

本教材使用说明

本教材系根据原理工科力学专业流体力学基础课教学大纲加以更新和修改后编写的，全书共分 11 章. 总的授课学时为 120，但若适当删减内容，亦可作为授课 80 学时的教材，即每学时平均阅读约 4 000 字. 各章节的具体时间分配如下：

章　次	绪论	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
120 学时	2	12	5	12	8	8	14	8	18	18	8	7
80 学时	2	9	4	9	6	6	10	0(或 6)	11	10	6(或 0)	7

无论授课学时为 120 抑还是 80 均请注意下列各点：

(1) 凡书中用小号字排印或加 * 的内容不必讲授，仅供部分学生自由选读.

(2) 讲授时，一定要结合专业需要精选例题，以便节约时间获得较好效果.

(3) 对于 80 学时的教学，可根据专业要求删减内容，下面提供一些初步建议，供参考：

绪　论　结合专业扼要重点讲授

第一章　重点讲授 1.1 节中的(二)(三)(四)和 1.2 节中与欧拉描述有关的内容，仔细或扼要讲授 1.3—1.6 节

第二章　仔细或扼要讲授 2.1—2.4 节和 2.6 节，在 2.5 节中只讲求合力，不讲求合力线

第三章　仔细或扼要讲授 3.1—3.4 节，3.6 节和 3.8—3.10 节，删去 3.5(二)节的 5 和 3.7 节中的(三)

第四章　结合专业精选例题

第五章　仔细或扼要讲授 5.1 与 5.4 节，删去 5.2 与 5.3 节中的部分推导

第六章　仔细或扼要讲授 6.1 和 6.3—6.7 节，删去 6.2 节中的(二)和 6.8 节中的(一)与(二)

第七章　全部删去(或适当删减 7.8，7.9 和 7.11 节中的内容)

第八章　仔细或扼要讲授 8.1，8.3—8.4，8.7—8.9，8.11 和 8.14 节，8.2 节只讲量纲分析法，删去 8.5 节中(三)，8.6 节中(二)与(三)的推

导，删去8.10，8.12—8.13节

第九章　仔细或扼要讲授9.1—9.3，9.5—9.10，9.13—9.14等节，删去9.4和9.11—9.12节

第十章　删去10.3节(二)，10.4节(二)(三)与10.5节(二)(三)中的推导，10.6节仅作定性分析，(或将全章删去)

第十一章　适当删去11.6与11.10节中的内容，并结合专业精选例题

根据本教材的内容和安排，本书不仅可作为理工科力学、工程热物理、空气动力学和地球物理等专业本科生流体力学基础课的教材，而且还可作为土木、化工、水利、热能、机械和环保等有关专业研究生的流体力学教材或参考书．此外，也可根据教学需要，选取书中的部分章节作为选修课教材．例如取1，3，8，9章与1，3，5，6，7章可分别组成粘性流体与无粘性流体力学课教材．取2，4，10章与1，3，8，9章中的部分内容，可组成工程应用性较强的流体力学教材等．

绪　　论

0.1　流体力学的研究对象和它与现代化建设的关系

流体力学是一门基础性很强和应用性很广的学科．它的研究对象随着生产的需要与科学的发展在不断地更新，深化和扩大．60 年代以前，它主要围绕航空，航天，大气，海洋，航运，水利和各种管路系统等方面，研究流体运动中的动量传递问题，即局限于研究流体的运动规律，和它与固体，液体或大气界面之间的相互作用力问题．50 年代以后，能源，环境保护，化工和石油等领域中的流体力学问题，逐渐受到重视．这类问题的特征是：尺度小，速度低，并在流体运动过程中还伴随有传热，传质现象．近年来，流体的对流传热，传质问题受到高度重视，并获得巨大发展．这样，流体力学的研究对象，从流体的动量传递扩展到它的热量与质量传递，也就是说，除了研究流体的运动规律以外，还要研究它的传热，传质规律．同样地，在固体，液体或气体界面处，不仅研究相互之间的作用力，而且还需要研究它们之间的传热、传质规律．

流体力学与我国现代化建设有着密切的联系，例如：研究大气和海洋运动可以做好天气与海情预报，以便为农业，渔业，航空，航海，国防和人民生活服务；研究各种空间飞行物体如飞机，人造卫星，导弹，炮弹和各种水上或水下运动物体如船舰，潜艇，鱼雷等的运动，可以了解它们的空气和水动力性能，以便获得阻力小，稳定性高的最佳物体外形；研究河流，渠道和各种管路系统内的流动，可以掌握它们的运动规律，特别是它们与各种界壁之间的作用力，以便获得耗能少，安全性高的工程设计；研究核反应堆，动力设备中的冷却系统，热交换器，水暖系统以及各种化工设备中的流动，不仅可以了解它们的运动规律，而且可以掌握它们在壁面处的传热，传质规律等．此外，油田气田的开发，地下水的利用，以及机械的润滑等均无不与流体力学密切相关．特别是近数十年来，流体力学与相邻学科相结合，发展了许多新的交叉分支学科，大大充实了流体力学的研究内容和扩

大了它的研究和应用领域.

0.2 流体力学发展简史

流体力学和其他学科一样,是人类为了满足自身生活和生产的需要,在认识与改造自然的斗争中,随着实践经验的不断积累,技术与知识水平的逐渐提高,才开始形成和发展起来的. 这一过程大致可分为五个时期:

第一时期——约公元前 30 000 世纪至前 20 世纪

从世界范围来看,这一时期主要包括旧石器时代和新石器时代(前 90 世纪至前 20 世纪). 而旧石器时代又可再分为早期(约前 30 000 世纪至前 2 000 世纪),中期(前 2 000 世纪至前 400 世纪)和晚期(前 400 世纪至前 90 世纪). 这是一个极其漫长、原始、蒙昧而又发展迟缓和缺乏文字记载的史前时期. 一切有关资料只能来自现有的考古成果. 这样,下面的叙述是不完全的,也不是一成不变的.

在旧石器时代早期,我们的祖先除了用天然石块、木棒以外,主要是打制一些简单、粗糙的石质工具,如砍砸器、刮削器、尖状器和原始石球等去采集植物果实和捕捉动物,过着游牧的群体生活. 在制作工具的过程中,已逐步知道应用力学中的尖劈原理. 在投掷石块、木棒、石球和以后经过改进的各种投掷物(如短矛与箭)时,就提出了抛射体在流体中的运动问题.

这一时期的最大突破是许多地方(如肯尼亚、中国、南非和法国等)的居民已知道使用自然火,到了中期又发明了保存火种与人工取火的方法. 这是人类首次使用和支配自然力的一种表现,它对人类的生活和生产产生了无法估计的影响.

进入中期以后,工具的品种翻新、形式多样,打制技术也有很大提高,同时还出现了复合工具,它们的典型代表是用石球与绳索制成的飞石索与绊兽索. 这些工具不仅大大提高了狩猎的射程和杀伤力. 而且还使人们意识到为了稳定飞行方向、减少阻力、扩大射程必须把石球制作得尽量接近球形.

晚期的特点是发明了磨制技术与钻孔技术,复合工具日益增多,出现了细石器和骨制工具. 欧洲普遍使用投矛器,它是利用增加投掷臂长以提高矛的初始速度. 我国发现了 3 万年前的石镞和近 2 万年前的骨针. 石镞的出现表明已有了弓箭,它是将机械功储存为势能再转换成动能以提高箭的速度,这是一件非常了不起的发明创造,更令人吃惊的是当时人们已认识到为了保证箭的飞行稳定需要在箭的尾部安装一些羽毛一类的配重物. 投矛器与弓箭的发明使人类的狩

猎水平达到一个新的水平.

约在公元前 9 千年左右,最后一个冰期即告结束. 地球上出现了一些温暖潮湿的地区如西亚、埃及、中国和印度等. 人类历史出现了重大转变,即由采集狩猎经济逐渐转变为农业畜牧经济,由游牧生活逐渐转变为定居生活,由旧石器时代逐渐转变为新石器时代,通常将这一转变称为农业革命.

这时西亚和中国成为人类文化最先进的地区. 约公元前 8 千年左右,巴勒斯坦、土耳其、伊朗、埃及和中国相继进入农牧业的形成阶段. 工具仍以打制为主,但细石器与骨制工具增多,为了满足农业生产的需要,还出现了石镰、石铲、石杵、石臼、石磨盘和石容器等工具. 几乎与此同时,即约公元前 8 千年与前 6 千多年,中国与伊拉克、伊朗分别掌握了制陶技术,这一发明极大地改善了人们的生活和生产.

为了用水方便,先民们最先大都定居在河流的二级台地或河网地区,这些地方常年雨量不均,要从事农业生产,需要进行人工灌溉. 土耳其、伊拉克、叙利亚和中国均发现公元前 6 千多至前 5 千年的原始灌溉沟渠遗迹. 这表明当时的人们已掌握了开沟引渠、修筑田埂的技术,也就是已认识到要使水流向下必须使渠底具有一定坡度的原理. 灌溉农业的出现是人类开始利用与控制另一自然力——水——的具体表现.

英国、埃及、荷兰和中国均分别发现了公元前 7 千多至前 5 千年的独木舟、宽翼与窄翼木桨等,这充分表明早在新石器时代初期,人们对浮力与反作用力的认识与应用就已达到相当成熟的阶段. 另一推动船舶前进的工具是风帆,尼罗河上至少公元前 3 千多年就出现了帆船,中国的甲骨文中也早已有了"帆"字;这说明中国至少也有 3 千多年的用帆历史. 风帆的出现是人类开始对第三种自然力——风——的利用和控制.

当人们汲取饮用或灌溉用水时,往往会遇到水源低,用水地高的情况,这时就需要有提水工具,最原始的有木桶、戽斗等. 值得一提的是公元前 4 千年中国烧制了一种尖底、小口、大腹的陶罐,在使用过程中,利用重心与浮心的相对变化,使汲水容易,是一件很富创造性的发明.

为了生产和生活的需要,约公元前 2 千年中国就发明了计时用的陶制单壶滴漏,600 年后,埃及出现了类似的计时工具,称为水钟,它们都是应用孔口出流原理制成的.

第二时期——公元前 20 世纪至 17 世纪下叶

自公元前 3 千年起,各文明古国相继进入有文字记载的时期. 但流体力学知识与工程设计概念仍然非常缺乏,在生产与生活实践中,人们只能依靠观察、测量和实践——提高——再实践——再提高的过程,去认识流体运动的一般性

质和应用它的定性规律.

为了发展农业、便利交通和改善饮用水，各文明古国均大力整治河道，兴建水利，开凿运河和发展灌溉，如埃及开发法雍地区，开凿连系尼罗河与红海的运河，中国治理黄河，沟通连系五大水系的大运河和修建闻名世界的都江堰等. 通过这些实践活动，不但积累了丰富的经验，提高了对水流运动规律的认识，而且还大大增强了人们对水流的控制与驾驭能力.

除了用地面水灌溉以外，还可以用地下水，通常称为井灌. 特别是，约公元前1千年，东土耳其与伊朗西北部的高原地区发明了用暗渠坎儿井进行灌溉. 约8百年后，中国的新疆地区也广泛使用这一技术.

约公元前1千年与公元1世纪中国分别发明了利用反作用原理控制船舶航向的木橹和尾舵，这是对世界造船业的一大贡献，欧洲直到19世纪才开始使用橹与舵.

约公元前700年，管仲(前725—前645)科学地总结了中国的治河与修渠经验，其中包括河渠与堤坝的定量设计理论，河流与河道的相互作用等. 这些论述，对后来的工程实践起了很好的指导作用.

公元前6世纪至公元3世纪，无论是在希腊、罗马抑还是在中国都是一个学术思想活跃、人才辈出的时期. 以后，欧洲进入黑暗时代. 从公元3至13世纪，中国的科学技术遥遥领先于欧洲. 在与流体力学有关的领域内，流体机械与航空似乎显得更为突出.

在希腊与罗马，公元前5世纪时，恩贝多克里(前492—前432)通过观察旋风和搅动盛于容器中的带颗粒液体发现了所谓“茶杯现象”.(参见第五章末“实验中的发现”(八))100年后，亚里斯多德(前384—前322)探讨了运动物体的阻力问题和旋风与旋涡的成因等. 再100年后，特斯贝斯(前3世纪)发明了单动式单活塞唧筒(泵). 菲罗(前3世纪)发明了用下击式水轮带动的链－筒式水车和虹吸管. 维特鲁维斯(前1世纪)随即深入分析了各种下击式水车，如鼓式、链－筒式和筒－轮式等. 至公元1世纪，希罗(62—)描述了一种用蒸汽转动的圆球，它实际上是喷气原理的最早应用.

几乎与菲罗提出链－筒式水车的同时，在地中海东部的西亚地区出现了筒－轮式水车. 公元前2世纪，在地中海北方的亚德里亚海东岸又出现了利用水力磨制玉米的水磨. 及至7世纪，始知伊朗存在风车，约两世纪后，在伊朗与阿富汗的交界处出现了立轴式帆风车. 12世纪时，在欧洲出现平轴式帆风车.

当欧洲出现水磨时，中国也将水力用于推动石碓和石磨. 公元1世纪，毕岚与杜诗分别发明了用于灌溉提水的翻车(即龙骨车)和用于冶炼鼓风的水排. 在风力利用方面，公元前40年，中国发明了利用人造风分离谷糠与谷籽的旋转扇车(或飏车). 12世纪前后又发明了双动式单活塞风箱，随及发展为各式各样的

风箱. 这些鼓风装置如扇车,风箱和龙骨车均于16世纪后传入欧洲. 水车、水磨与风车的出现标志着人类对自然力的进一步应用与控制.

此外,中国在前4世纪就发明了比弓箭射程更远,杀伤力更强的弩,这比欧洲至少早1 200年. 10世纪时,中国又巧妙地发明了双动式火焰喷射器,它的性能大大优于欧洲的单动式火焰喷射器.

中国的墨子(前468—前370)曾经对浮力现象做过仔细的观察和定性的概括,约两世纪后,阿基米德(前287—前212)提出浮力的定量理论.

在航空方面,中国早在公元前5与前4世纪时,鲁班(前507—前444)与墨子就分别用竹木制成了能在空中飞翔的鹊和木鸢. 这是最早的风筝和飞行器. 公元3世纪,葛洪(284—363)制造"飞车"(即竹蜻蜓),被世界公认为是飞机螺旋桨与直升机旋翼的始祖. 直到16与19世纪,欧洲才分别知道有风筝和开始研究竹蜻蜓. 公元1 161年,中国将喷气推动的火箭和火箭式"霹雳炮"用于战争. 这是世界航空史上最早使用火箭的纪录. 其它如降落伞,热气球等亦均首先在中国出现.

早在公元前2世纪的"黄帝内经"中就确立了人体的血液循环理论. 英国的W.哈维(1578—1656)是1628年才提出来的. 11世纪的沈括(1031—1095)结合漏壶中的渴鸟(即虹吸管)对细小圆管中的水流问题进行了仔细地研究,写出了价值颇高的"浮漏仪"一文. 他的结论与700年后J.L.M.泊肃叶(1799—1869)和G.H.L哈根(1797—1884)的实验结果完全定性地符合.

15世纪,L.达·芬奇(1452—1519)重视观察与实验方法,描绘和叙述了许多重要流动现象,正确地叙述了相对性原理和归纳了定常流动的连续性原理,但未被重视,约100年后(1628年)又被B.卡斯特里(1577—1644)重新发现. 1638年,伽利略(1564—1643)首先将实验方法引入力学,并用以研究运动物体的阻力. 1647年,D.帕斯卡(1623—1662)继S.斯蒂文(1548—1620)与E.托里拆里(1608—1647)之后,通过现场测量,提出流体静力学的基本关系式. 1671年揭暄进行旋涡实验,他的结果与后来的理论与实验结果均相当符合. 这是我国继管流之后的又一重要实验. 1686年E.马里奥特(1620—1684)在他去世2年之后,才知道他发明了测量运动物体阻力的天秤. 它是空气动力天秤的始祖.

第三时期——17世纪下叶至20世纪初叶

这是流体力学的初步形成与发展时期;除了继续使用朴素的唯物思想与具体的实践方法解决生产与生活中的众多流体问题以外,更为重要的是在这些工作的基础上,逐步建立与发展了解决流体力学问题的理论与实验方法,并初步加以应用.

1678年I. 牛顿利用理论与实验相结合的方法,研究运动物体所受的阻力,

获得初步成功. 同时,他通过分析与实验,还首先提出粘性流体的剪应力公式,这为建立粘性流体的运动方程组创造了条件. 1732 年 H. 皮托(1695—1771)发明了测量流体总压的皮托管. 1905 年 L. 普朗特将其发展为测量总压与静压的皮托－静压管. 1738 年 D. 伯努利对孔口出流与变截面管道流动进行了仔细的观察与推理和广泛的测量,提出著名的定常不可压缩流体的伯努利定理. 1748 年 M. W. 罗蒙诺索夫(1711—1765)提出质量守恒定律. 1752 年 J. L. R. 达朗伯在研究物体阻力时,获得达朗伯佯谬. 同年,他根据质量守恒原理,首次提出流体的连续性方程,23 年后,他为了研究船舶阻力与确定它的最佳形状,在重水池中对船舶模型进行了系统广泛的实验,他是继伽利略之后又一个在实验研究方面作出重要贡献的人.

1775 年 L. 欧拉提出流体运动的描述方法和无粘性流体运动的方程组,并开始研究无粘性无旋流体的平面与空间运动,其中包括水波运动. 欧拉是理论流体力学的奠基人. 6 年后,J. L. 拉格朗日引进流函数的概念,并首先获得无粘性无旋流动所应满足的动力学条件(即拉格朗日定理),和提出求解这类流动的复位势法,他进一步完善了无粘性无旋流动的基本理论.

19 世纪上、中叶开始出现对粘性流体、无粘性有旋流体与可压缩气体流动的理论研究. 与牛顿的剪应力公式相对应,又是通过实验与分析,1822 年 J. R. 傅里叶与 1855 年 A. 菲克分别提出傅里叶导热公式与菲克第一扩散定律,它们为研究流体的传热传质问题奠定了基础,1823 年 L. 纳维与 1845 年 G. G. 斯托克斯分别用不同的假设和方法,建立了不可压缩与可压缩粘性流体的运动方程组,从此,开始了粘性流体运动的研究. 在此之前,1840 年 J. L. M. 泊肃叶与 1839 年 G. W. 哈根分别独立地发表了他们对细小圆管中层流流动的实验结果,它与 1845 年斯托克斯获得的理论结果完全吻合.

欧拉早已指出:在无粘性流体中,除了无旋运动以外,也许还存在另一类流动. 1845 年亥姆霍兹引进一系列有关涡旋的基本概念,提出了现在以他的名字命名的涡旋第一与第二定理. 1860 年他又将流体质点的运动分解为移动、转动和剪切变形三种,这就大大地推广了无粘性流体的研究范围,他不愧是研究无粘性有旋运动的创始人.

早在 1742 年 B. 罗宾斯为了研究炮弹飞行,就用圆球进行了高速(后来估算,马赫数 $M=1.04$)运动物体的阻力实验. 1808 年 S. D. 泊松与 1848 年斯托克斯分别对等温气体中的简单波与间断面进行了研究,后者并根据质量与动量守恒原理,建立了间断面前后流动参量所应满足的关系式. 这是对可压缩气体运动的理论研究的开始. 1842 年 J. R. 迈尔在过去数十位发明者(如希罗、惠更斯、莱布尼兹、汤姆逊和戴维等)工作的基础上,提出能量守恒定律,但未引起注意. 5 年后,J. P. 焦尔与 H. 亥姆霍斯几乎同时又独立地发现这一定律. 1852 年

F.雷什通过对波浪运动的观察和船舶模型的实验,提出重力作用下流体运动的相似性参数——雷什数,即现在的弗洛德数. 1856年H.P.G.达西通过实验,提出著名的达西公式. 1881年H.A洛伦茨与1904年M.斯莫卢乔斯基提出可压缩气体的能量方程.

19世纪末叶的另一进展为对湍流开始了系统研究,发展了相应的实验设备. 1883年O.雷诺用不同直径的圆管,进行一系列实验,结果发现流动有两种状态,即层流与湍流;而且从层流到湍流的过渡,仅依赖于一个无量纲数(现称雷诺数). 12年后,他又引进湍流(或雷诺)应力的概念,并用时均方法,建立了不可压缩流体作湍流运动时所应满足的方程组. 雷诺的研究为湍流的理论研究奠定了基础.

1891年F.W.兰彻斯特提出速度环量产生升力的概念,这为建立升力理论创造了条件. 他也是第一个提出有限翼展机翼理论的人.

在发展理论研究的同时,人们还开始建立了供实验用的各种设备. 1872年W.弗劳德主持建造了一座供船舶实验用的拖曳水池. 1884年H.菲利普斯改进了13年前由F.H.韦纳姆设计建造的第一座低速风洞,并使其正式投入使用. 1896年C.A.帕森斯与1899年P.维埃耶分别建造了第一座水洞与第一个激波管. 1892与1904年L.瑞利首先提出用量纲分析法求流动相似性参数.

第四时期——20世纪初叶至中叶

进入20世纪以后,流体力学的理论与实验研究除了在已经开始的各个领域继续开展工作以外,均围绕发展航空航天事业的需要在进行,并取得迅猛发展. 在运动物体的升力方面,1902年W.M.库塔与1906年N.E.儒可夫斯基分别独立地提出特殊的与一般的库塔-儒可夫斯基定理和假定,1910年H.布拉修斯与卡普雷金分别独立地提出一般二维物体受力公式,这样就建立了完整的二维升力理论. 至于运动物体的阻力问题,至此仍缺乏完善的理论,人们普遍认为:尾涡是物体阻力的主要来源,遂将注意力转向物体尾流的研究. 1901年E.J.马雷首先拍摄到清晰的尾流照片,7年后,H.贝纳德研究尾流涡系中各参量之间的关系,1912年T.von卡门从理论上分析了涡系(即卡门涡街)的稳定性.

1904年L.普朗特在自建的水槽中进行了大量测量与仔细观察之后,提出著名的边界层理论,它是计算高雷诺数粘性流动的有力武器,后来,它的应用范围不断扩大. 1921年卡门提出解边界层方程的动量积分关系式,这是一种较好的近似方法.

在1910—1945年的三十年期间,机翼理论与实验有着极大的发展,1910年儒可夫斯基首先用共形映射法获得(后来以他的名字命名)一种理想的翼型,从此开始了翼型的理论研究. 三年后,普朗特在实验与计算的基础上提出了第一

个可供应用的三维机翼理论,即普朗特-兰彻斯特升力线理论. 1925 年 J. 阿克瑞特首先提出超声速翼型的线性化理论,由此,揭开了超声速机翼理论的研究. 在大力开展机翼理论研究的同时,各先进工业国家还对低速与高速翼型,机翼与组合体等进行了大量的实验研究,积累了丰富的设计参考资料.

1920 年 A. 布泽曼改进了 15 年前由普朗特设计建造的、$M=1.5$ 的第一座超声速风洞,并使其投入使用. 1928 年与 1930 年 H. 格劳尔与 L. 普朗特分别独立地提出以他们的名字命名的相似性准则,通过它,在亚声速的范围内,可以修正翼型升力的压缩性影响. 1939 年与 1941 年钱学森与卡门分别独立地提出一更精确的准则. 以后,这种方法经常在机翼理论中使用. 1929 年 H.L. 德莱顿引进湍流强度的概念,1932 年,他又用自己设计制造的热线流速计,第一次成功地测量到湍流涨落速度,这种仪器的出现和应用,加深了人们对湍流的认识.

为了管路系统的设计与基础研究,在本世纪的 40 年代,J. 尼库拉德塞对各种光滑与粗糙的圆形或非圆形管道的时均速度分布和摩擦系数,进行了系统、准确、精心的测量. 1954 年 J. 劳弗与 P.S. 克莱巴诺夫又分别对沿圆管与沿平板的湍流特性进行了出色的测量.

1947 年第一台电子计算机问世后,数值方法得到迅速发展. 计算方法继实验与分析方法之后,成为解决流体力学问题的第三种方法. 最早利用电子计算机计算流体力学问题的可能是 Z. 科帕尔,1947 年他用计算机解泰勒-麦科尔方程,获得超声速气流绕无穷圆锥的大量数值解. 1950 年 J. von 诺伊曼与 1963 年 W.F. 诺分别提出显式与隐式的人工粘性的概念,以涂抹激波并增加计算稳定性. 在数值计算的方法方面,有限差分法在电子计算机出世之前即已存在,以后又相继发展了谱法,有限元法,边界元法以及它们的许多变种. 在这方面,前苏联学者有着重要的贡献.

第五时期——20 世纪中叶以后

进入 20 世纪 50 年代后期,人类飞行与进入太空的愿望均已基本实现,流体力学的研究内容,有了明显的转变,除了对一些较难,较复杂的问题,如湍流、流动稳定性与过渡、涡旋动力学和非定常流等继续进行研究外,更主要的是转而研究石油、化工、能源、环保等领域中的流体力学问题,并与有关的邻近学科相互渗透,形成许多新分支或交叉学科,如计算流体力学,实验流体力学,可压缩气体力学,稀薄气体力学,磁流体力学,天体物理流体力学,液体动力学,地球物理流体力学,非牛顿流体力学,生物流体力学,多相流体力学,环境流体力学,物理-化学流体力学,渗流力学和流体机械流体力学等. 一般说来,这些新的分支或交叉学科所研究的现象或问题都比较复杂,在流动过程中不仅有动量传递,很多时候还有热量传递和质量传递,甚至还伴随有物理或化学反应. 而且所研究的流体

本身也不简单地是单相的或牛顿的,很多时候是多相的或非牛顿的.面对这些众多而又复杂的新问题,要想很好地解决它们,实际上是对流体力学工作者的一次大挑战.因为现有的流体力学运动方程组并不能完全准确地描述这些新现象和新问题,试图用现有的运动方程组和纯计算的方法去解决这些问题也是相当困难的.唯一可行的道路是采用纯实验的方法或实验与计算相结合的方法.在后一种方法中,即先用实验方法获得一些有用的经验数据,然后与计算方法相结合进行半经验的数值计算,并将所得结果与纯实验结果进行比较.近年来在一些新分支或交叉学科(如多相流、生物流体等)中采用这种方法,获得了比较好的效果.特别是大大推动了新分支或交叉学科实验技术的发展.

综观流体力学的发展历史,可以清楚地看出:

(1) 生产和生活的需要是产生和发展科学技术的动力.没有水利、航运、航空、化工、石油、能源等方面的需要,就没有现在的流体力学;

(2) 从旧石器时代到现在,人类文化的演进是以加速度进行的.对于流体力学来说,在 17 世纪下叶以后的 350 年中已经取得了惊人的进展;

(3) 在流体力学的发展过程中,实验(和在工程技术中的实践)是最先使用的一种方法,流体力学中的一切重要现象和原理,几乎都是通过它发现的(可参阅各章末的"实验中的发现"一节).它对流体力学的发展具有特别重要的意义;

(4) 人们的认识总是从简单到复杂,从具体到抽象和从特殊到一般的.流体力学的研究内容也遵循这一原则,从单相无粘性流体的定常运动发展到多相非牛顿流体的湍流运动,从单纯的力学发展为复杂的交叉学科,从单纯的动量传递发展为动量、热量、质量同时传递;

(5) 流体力学虽已取得巨大进展,但一些重要的基本问题如湍流、涡旋运动、流动稳定性、非定常流动与非线性水波等仍未获得圆满解决.众多的流体力学新分支或交叉学科均尚处于发展的初期,这些工作均有待于流体力学工作者的进一步努力;

(6) 13 世纪以前,我国在流体力学原理的应用方面做出过巨大贡献,曾经领先于世界.20 世纪 40 年代以后,在理论上也做出过不少成绩.特别是新中国建立以后,这方面的工作,得到迅猛发展,不仅建造了众多的实验设备,解决了无数的生产实际问题,而且还培养了一支具有较高水平的理论和实验队伍,这为今后进一步发展我国的流体力学事业,奠定了坚实基础.

0.3　流体力学的研究方法

目前,解决流体力学问题的方法,共有:实验,分析与数值计算三种,现将它

们的主要步骤和优缺点,分别扼要地叙述如下:

1. 实验方法

在流体力学的发展过程中,实验方法是最先使用的一种,其他两种方法出现以前已做出过巨大贡献,即使到现在,若不使用这种方法,航空,航天事业和大型水利枢纽等复杂系统的顺利实现,将仍然是不可能的. 应用这种方法的主要步骤是:(1) 对所给定的问题,选择适当的无量纲相似参数,并确定其大小范围;(2) 根据(1)准备试验条件,其中包括模型的设计制造与设备仪器的选择使用等;(3) 制订试验方案并进行试验;(4) 整理和分析实验结果,并与其他方法或其他著者所得的结果进行比较等. 实验方法的优点是:能直接解决生产中的复杂问题,能发现流动中的新现象和新原理,它的结果可以作为检验其他方法是否正确的依据. 这种方法的缺点是:对不同情况. 需作不同的实验,即所得结果的普适性较差.

2. 分析方法

继实验方法之后出现的是分析方法,应用这种方法的主要步骤是:(1) 建立简化的数学模型,即根据所给问题的特点,作出一定的假定,并用以简化一般的流体运动方程组和初始条件与边界条件;(2) 用分析方法求此简化后的初值问题或边值问题的分析解;(3) 选取适当的算例,利用分析解进行具体的数值计算;(4) 将所得算例结果与用其他方法所得的相应结果进行比较,以检验简化模型的合理性. 分析方法的优点是:分析解明确地给出了各种物理与流动参量之间的变化关系,有较好的普适性. 它的缺点是:数学上的困难很大,能获得的分析解的数量有限.

3. 数值方法

用电子计算机进行数值计算,这是20世纪中叶才出现的一种方法. 这种方法的主要步骤是:(1) 对一般的流体运动方程,初始或边界条件,进行必要的简化或改写;(2) 选用适当的数值方法,对简化或改写的初值问题或边值问题进行离散化;(3) 编制程序,选取算例,进行具体计算,并将所得结果绘制成图表;(4) 将算例结果与实验或其他计算方法结果,进行比较,数值方法的优点是:许多用分析法无法求解的问题,用此法可以求得它们的数值解. 如果计算机的速度与容量继续提高,计算方法不断改进,它所起的作用,将愈来愈大,但应注意,它仍是一种近似方法,它的结果仍应与实验或其它精确结果进行比较. 这种方法的缺点是:对复杂而又缺乏完善数学模型的问题,仍无能为力.

众所周知,实验结果是随着实验条件(包括相似性参数、模型布局和它的向位等)的改变而改变的. 如果在采用计算方法时,也考虑到在计算过程中能使这些实验条件随意改变,对不同条件,可获得不同数值结果,这与实验方法中的情况极为相似. 现称为数值实验. 但应注意二者之间的本质差别并未因此而消

失. 即数值结果是建立在具有一定假设条件的运动方程组之上的,而实验结果则直接来自物理的模拟. 因此,这些数值结果仍应受到实验结果的检验. 如果在某一实验条件范围内,已经证实数值与实验结果相当一致,则在这一范围内可以用数值计算代替实验,以节省实验费用. 但如果计算的情况是未知的,则应小心从事,因为数值计算缺乏自觉性,容易导致谬误的结果. 但在复杂流动的解释方面,如果数值实验采用一些特殊的技术(如条件采样等)也许对实验结果是有帮助的.

综上所述,可以清楚地看出:以上三种方法,各有其优缺点,它们是互相补充的. 一个流体力学工作者,应当熟练地掌握这些方法,以便根据具体情况,取长补短地加以应用.

第一章 流体的物理性质和流体运动物理量的描述

本章包括两部分内容,即流体力学中有关的流体物理性质与流体运动物理量的描述. 1.1 节是从物性的角度扼要地介绍流体的特征,连续介质假设,流体的可压缩性与热膨胀性,流体的各种输运性质,表面张力和毛细现象等. 1.2 与 1.3 节分别介绍描述流体物理量与流体质点运动的方法. 1.4 节是从运动学的角度分析流场中任一点及其邻域的相对运动. 1.5 与 1.6 节分别介绍作用于流体上的力与应力和应变率之间的关系,即本构方程等. 这些都是建立流体力学理论的重要基础.

1.1 流体的物理性质

(一) 固体、液体及气体

在常温常压下,物质可存在固态、液态和气态三种聚集状态(在高温和高压情况下,还有等离子态和超固态),它们分别称为固体、液体和气体. 液体和气体又合称为流体. 固体与流体的表观差别是前者具有一定的形状,不易变形,而后者则无一定的形状,且易于变形,即具有一定的流动性. 与固体及液体相比较,气体在受到压强或温度变化时,体积有较大的改变. 此外,液体通常存在自由表面,这是固体及气体所没有的.

物质所表现出来的这些外部宏观性质的差别是由其内部微观结构、分子热运动和分子间的作用力决定的. 近代物理学研究表明,任何物质都是由大量分子构成的. 根据热动力学假设,这些分子处于永不停息的随机热运动和相互碰撞之中. 同时各分子之间还存在一种相互作用力,当分子之间的距离较近时,作用力以吸引为主,其主要来源于分子间电偶极矩(核外的电子云中心与核不重合而产生)所极化而引起的相互作用. 当分子非常接近时,作用力以排斥为主,这

是由于各分子外层电子云开始重叠而产生的排斥作用. 实验与计算结果表明,两分子间的吸引力 F_a 与排斥力 F_r 可分别表示为

$$F_a = \frac{\mu}{r^t},$$

$$F_r = \frac{\lambda}{r^s}, \quad s > t,$$

其中 r 为分子间的距离,μ、λ、s 及 t 为正数. F_s 为 F_a、F_r 两者之代数和. 图 1.1 (a)为分子力随分子之间距离的变化,(b)为势能

$$U = -\int_{\infty}^{r} F_s \mathrm{d}r$$

的变化曲线. 当两分子相距较远时,分子间相互作用力很小,可忽略. 当两分子接近并达到 10^{-9} m 距离(称此距离为作用半径)时,开始呈现吸引力 F_a,然后吸引力逐渐加大. 当分子进一步靠近,排斥力开始出现,并随距离的缩小而急剧增加. 在两分子相距 r_0 处,吸引力与排斥力相互抵销:$F_s(r_0)=F_r(r_0)-F_a(r_0)=0$,这时势能 U 达最小值(分子动能 K 则达最大,$U+K=E$ 为总机械能). 显然,当 $r>r_0$ 时,吸引力为主,$F_s(r)<0$;当 $r<r_0$ 时,排斥力为主,$F_s(r)>0$. r_0 称为平衡距离,其量级约为 10^{-10}m. 当两分子更接近时,由于排斥力愈来愈大,动能愈来愈小,并终于在 $r=d$ 处动能(速度)为零,分子运动转向,两分子作了一次"碰撞". 距离 d 通常认为是分子有效直径,对于简单分子,此直径约为 2.5×10^{-10}m(稍小于 r_0,且分子力的作用半径约为其 4 倍).

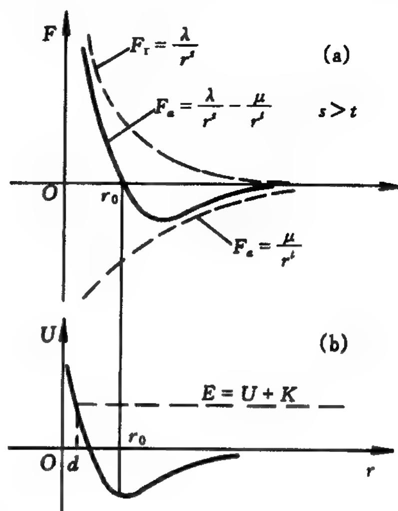


图 1.1 (a) 分子间相互作用力
(b) 分子间相互作用势能

众所周知,1 mol 的任何物质,都包含有 $6.022\,136\,7\times10^{23}$个分子(阿佛加德罗常数). 在常温常压下的气体,1 cm^3 体积中约含有 2.7×10^{19} 个分子,因而分子间的平均距离约为 3.3×10^{-7}cm(为分子线尺度的 10 倍). 对液体,分子间平均距离则较小,约为 10^{-8}cm. 对固体则比液体情况更小些. 因此,气体分子之间作用力很小,分子近似作自由与无规则的运动,以致气体无一定的形状,易于压缩,并各向同性. 固体,由于分子间距离最小,作用力也就最大,分子几乎呈固定排列,形成远程有序晶格,成为各向异性的晶体. 但若晶格远程(大于 15Å=15×10^{-8}cm)排列无序时,就是各向同性的非晶体. 固体分子的热运动仅在其平衡位置附近作振荡,故固体具有一定的形状和体积,易变形. 至于液体,其分子

间的距离比固体的稍大(大 1/3 左右),因而作用力也仅比固体的稍小,其分子排列则与非晶体相似,因而液体有一定的体积,难于压缩,且各向同性. 液体分子热振荡的振幅比固体稍大,且其平衡位置经常变动,在平衡位置上逗留的时间也长短不一,其平均逗留时间称定居时间. 定居时间 τ 的长短取决于分子力的大小和分子无规则运动的强弱,分子力愈大,定居时间愈长. 温度愈高,分子无规则运动也愈烈,平衡位置愈易改变,即定居时间愈小. 一般情况下液体受外力的作用时间 t 比定居时间 τ 大得多(一般金属液体的定居时间约为 10^{-10}s),在这段时间内,液体将沿外力方向移动平衡位置,引起液体的流动,形成所谓液体的易流动性.

物质三态在一定的条件下还互相转化,例如,每当温度改变到一定程度,分子热运动足以破坏某种特定相互作用形成的秩序时,物质的宏观状态就可能发生突变,形成另一种聚集态,这就是所谓相变. 图 1.2(a)为实验所得的物质的状态方程中三个变量——压强 p、比容 v、温度 T 的空间曲面,称为 pvT 面. 它描绘了物质所有可能的聚集态(本图为凝固时收缩的物质,凝固时膨胀的物质如水,其 pvT 面稍有不同),这个曲面由固相、液相、气相、固相及液相、液相及气相、气相及固相这些面组成. 前三个面是单相的,后三个面是两相共存的,ab 线则是三相共存状态. c 为临界状态. 物质在相变期间是两相共存的,如在熔解、蒸发、升华(固相直接转变为气相)过程中,分别为固液、液气、固气两相共存. 在等压时比容随温度变化(图示 $fghde$ 线)及等温时压强随比容变化(图示 $jdei$ 线)的过程中,都有液固及液气这种两相共存的情况发生. 图(b)是所谓的相图,它是 pvT 面向坐标面 pT 上的投影. 从相图上看两相共存的情况更明显.

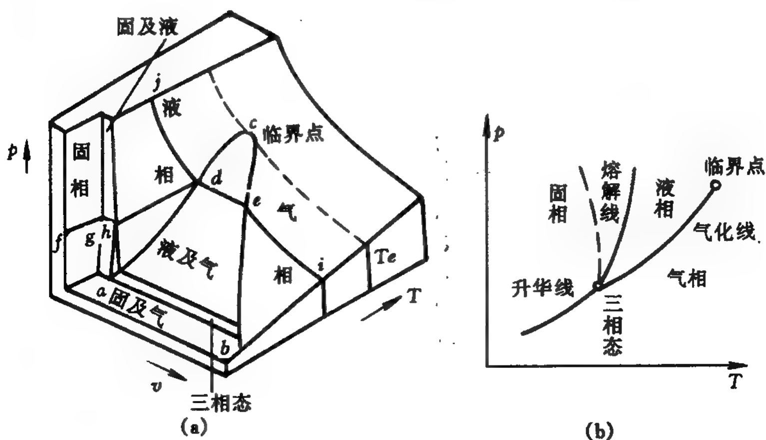


图 1.2　(a) 凝固时收缩物质 pvT 面
(b) 凝固时收缩物质相(pT)图(虚线为凝固时膨胀物质熔解线)

相变时有两个显著现象发生,一是相变中发生体积变化.物质从固相转变为液相时,体积变化约10%,气相变为液相时,体积的变化则随温度而不同(见图1.2(a)中 d、e 两点对应的比容).相变时的另一现象是产生潜热,气化、熔解、升华时放热,凝结、凝固、凝华时吸热.表1.1为一些物质和元素的熔解热及气化热.

应当指出,有些物质,例如沥青(非晶体),其相变过程与水等物质是不同的.当温度升高时,固态沥青先是由硬变软,然后由稠变稀,最后才成为液体,固液两态无明显界限.对这种情况,有时就只能用粘度系数 μ 值(见本节输运性质)来划分,当 $\mu<10^{14}$ Pa·s 时,定为液态,当 $\mu>10^{14}$ Pa·s 时,定为固态.

表1.1 一些物质的熔解热与气化热

物质	正常熔点(K)	熔解热(kJ/kg)	正常沸点(K)	气化热(kJ/kg)
水 H_2O	273	334	373	2 257.0
醋酸 CH_3COOH	290	196.7	391	406
苯 C_6H_6	279	126	353	393.9
氧 O_2	328	13.8	363	213.9
二氧化碳 CO_2	217	180.8	195(升华)	554.2(升华)
酒精 C_2H_2OH	159	109.3	351	837.2
氨 NH_3	195	351.6	240	1 366.3
铁 Fe	2 081	314.0	3 296	6 279
硫 S	659	39.1	991	287.2

综上所说,一般认为,物质形成三态是分子间相互作用的有序倾向及分子热运动的无序倾向共同作用的结果.对于固体,分子间相互作用力较强,无规则运动较弱,有固定的形状和体积,不易变形和压缩.对于气体,分子间作用力较弱,无规则运动剧烈,无固定形状和体积,易于流动和压缩.对于液体,其特征介于固体与气体之间,有一定的体积,但无固定的形状,易变形,不易压缩.依据固体、气体的特征,已能对它们的性质在理论上作出阐述.只有液体,其主宰因素复杂,至今尚未有一套完整的液体物性理论.

(二)连续介质假设

根据流体的物质结构,流体由分子组成,分子作随机热运动,分子间有比分子尺度大得多的间距,在某一时刻,流体分子离散地,不连续地分布于流体所占有的空间,并随时间不断地变化着.

流体力学是研究流体的宏观运动的,研究的对象不直接是这些物质粒子本身,而是从这些物质抽象出来的一种模型,这种物质模型就是连续介质.连续介质模型认为(假设)物质连续地无间隙地分布于物质所占有的整个空间,流体宏观物理量是空间点及时间的连续函数.

显然，物质的空间连续分布与物质的离散结构是不同的，它们可否在某种意义下是协调一致的？此外物质宏观物理量如何确定，怎样与微观结构性质相联系？这是建立和发展流体力学的一个最基本和关键的问题.

研究流体的宏观运动虽也可以从微观(粒子理论)入手，并已获得部分成功，但一方面由于基本粒子规律本身尚未完全建立，即使依目前建立起来的规律能用于研究宏观运动，但每当发现基本粒子的一个更基本性质时，又得进行从头修改. 而粒子理论的发展，原则上讲是无穷尽的；另一方面，用微观方法研究在数学上还有不少困难，而且由于物质结构的复杂性，研究中通常采用统计平均的方法，常使基本粒子的一些细节与物质宏观力学行为无直接关联，这就失去了从粒子根本规律出发的原来意义. 因此目前研究宏观运动一般都借助宏观方法.

采用宏观方法研究宏观运动，意味着不考虑单个粒子运动及其物理量，而是考虑大量粒子的平均运动及其统计特性，如速度、密度、温度等. 显然，这里涉及到用作平均的尺度问题. 下面以密度这一宏观物理量为例来作一分析. 设某一时刻，在流体中取一立方体，当立方体体积 V 或其边长 a 向一点趋于零时，就得到流体中该点处单位体积的平均质量即平均密度值 $\bar{\rho}$ 的变化过程(图 1.3). 由图看出，取过大或过小的 V 或 a，如 $a>10\text{cm}$，$a<10^{-6}\text{cm}$，其相应的平均密度并不反映流体某处的密度值. 因为对过大的 a，它可能已受到周围密度变化的影响，其平均密度 $\bar{\rho}$ 不能反映该点密度值. 而对过小的 a，则会使此所取体积中分子太少(例如 $a=10^{-6}\text{cm}$ 时，所取体积中仅有分子 27 个)，其随机运动可能随时影响密度值，因而引起密度值的很大波动. 只有当边长 a 取某中间值，例如取 $a\approx$

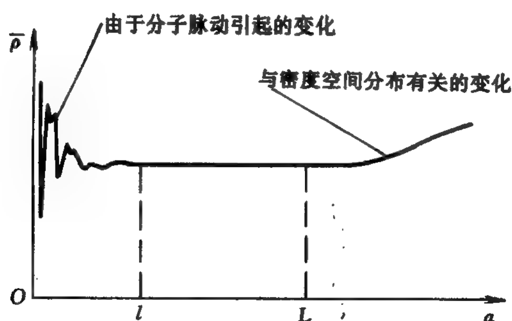


图 1.3　平均密度 $\bar{\rho}$ 随 a 的变化

10^{-3}cm，其平均值取值稳定，才代表该点平均密度. 这时，一方面，a 值已远小于密度有显著空间变化的尺度，因而以这样的 a 相应所得的平均密度可以反映质量在空间各点处的不同分布状况. 另一方面，在与此 a 相应的气体体积 10^{-9}cm^3 中，在标准状态下已包含了约 2.7×10^{10} 这么多个分子(对水，约包含 $3\times$

10^{13}个分子),完全可以获得一个确定的统计平均密度. 因此采用 a 约为 10^{-3}cm 这一尺度作为一个长度尺度,在这一尺度相应的体积上对质点统计平均,就确定了密度这一宏观物理量. 确定其它宏观物理量也大致相仿.

由此看到,如果以分子间平均距离(对气体为 10^{-7}cm,对液体为 10^{-8}cm)或气体分子平均自由程(10^{-6}cm)作为粒子结构的一个长度尺度,并记作 l,将空间密度等物理量有显著变化的尺度记作 L,取

$$l \ll a \ll L$$

这样的 a,作为流体宏观物理量统计平均的尺度是合理的.

在大多数流体力学问题中,L 的尺度一般远大于 1 mm,远比粒子结构的尺度 l 大得多. 采用 $l \ll a \ll L$ 这样的a,意味着采用比粒子结构的尺度大得多的尺度,粒子结构的尺度微乎其微,可以忽略,从而可以不把物质看作为由离散粒子构成,而认为物质连续地占满其所有的空间,它们在所取尺度上具有物理量的统计平均值,并在空间具有连续分布. 这样一种假想化的介质称为连续介质.

在连续介质中,常常把较微观粒子结构尺度大得多而较宏观特征尺度小得多的这样的流体团,称为质点. 因此,质点包含着很多很多分子,但比起宏观特征尺度(例如密度、速度有显著变化的尺度)来,它又很小很小,概括起来就是,它在微观上是充分大的,在宏观上是充分小的. 质点具有的物理量是均匀的,它就是其中很多很多粒子的统计平均值. 连续介质就由这些连续分布着的质点组成.

既然质点在宏观上是充分小的,它又连续地占满它所占有的空间,那么,质点在它所在的空间也就相当于一个空间点. 于是质点的物理量也就被认为是流体所在空间上空间点(同样,也是时间)的连续函数. 引入连续介质这一概念的目的,也正在于此. 可见,连续介质是来自数学上的要求,但如前所述,它在物理上,在研究流体宏观运动的意义上也是合理的. 实验和实践表明,基于连续介质假设而建立起来的流体力学理论,是正确的.

由上可知,连续介质完全是在宏观意义下的概念,当我们不是考虑与粒子结构尺度有同样尺度而是比此尺度大得多的尺度的现象时,连续介质假设就成立. 飞机、船舶在空气、水中的运动,其特征尺度例如船长,远大于粒子结构尺度,空气和水被认为是连续介质;血液在动脉中的流动(红血球的直径约为 8×10^{-4} cm,它在直径约 0.5 cm 的动脉中流动),血液就被当作连续介质;甚至当研究星系结构时,恒星间的距离约为 4×10^{18}cm,它们在半径约为 4×10^{22}cm 的银河系中运动,星系也是一种连续介质.

然而,在研究高空稀薄气体中的物体运动时,分子平均自由程很大,与物体特征长度尺度相比为同量阶,这时便不能视稀薄气体为连续介质. 同样,血液在微血管(其直径可达 10^{-4}cm 量阶)中的运动,也不把血液当作连续介质. 这是连续介质应用范围的限制.

(三) 流体的可压缩性与热膨胀性

1. 流体的密度、比重与比容

密度、比重与比容是流体最基本的物理量．如前所述，流体密度 ρ 是流体中某空间点上单位体积的平均质量，即

$$\rho = \lim_{\Delta\tau \to \Delta\tau_0} \frac{\Delta m}{\Delta\tau}$$

上式中的 $\Delta\tau_0$ 宏观上取得足够小，而微观上又足够大．为了数学处理的方便，通常将上式写为

$$\rho(x, y, z, t) = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta\tau} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\tau}$$

密度是空间位置及时间的函数，其单位为 $\mathrm{kg/m^3}$．

已知了密度 ρ，流体的微体积元 $\mathrm{d}\tau$ 内的质量应为 $\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}\tau$，而体积 τ 内的质量应为 $m = \int_\tau \rho \mathrm{d}\tau$．

在一些工程问题中，还常常用到比重这一概念．流体的比重是该流体的重量与同体积水在 4℃ 时的重量之比，或该流体的密度与 4℃ 水的密度之比．比重以 δ 表示

$$\delta = \frac{\rho}{\rho_{4℃水}}$$

显然，比重为一无量纲量．

此外，在流体力学中还用到比容这一概念．比容是密度的倒数，即单位质量流体所占有的体积，以 v 表示：

$$v = \frac{1}{\rho}$$

其单位为 $\mathrm{m^3/kg}$．

表 1.2 是从附录(D)表 D1 与表 D2 中选取的几种常见流体的密度．必须记住，277K 时水的密度为 $\rho = 1\,000\mathrm{kg/m^3}$，289K 时空气的密度为 $\rho = 1.226\mathrm{kg/m^3}$．

流体密度值的大小，除依流体的种类不同外，通常还决定于压强和温度，当流体是多组分的混合物时，密度还是各种组分浓度的函数，例如，海水是水与各种溶解盐的混合物，海水密度常认为是压强、温度及盐度(盐度是单位质量海水中溶解盐的质量，以 ζ 表示)的函数：$\rho = \rho(p, T, \zeta)$；大气是干空气(干空气本身是一种混合物，但常可把它认为是单一组分气体)与水汽的混合物，大气密度是压强、温度及比湿(单位质量空气中含有的水汽质量，称为比湿，以 q 表示)的函数：$\rho = \rho(p, T, q)$．

2. 流体的可压缩性与热膨胀性

流体在外力作用下，其体积或密度可以改变的性质，称为流体的可压缩性；而流体在温度改变时其体积或密度可以改变的性质，则称为流体的热膨胀性．

表 1.2 常用流体的密度

流体名称	温度(K)	密度(kg/m^3)	流体名称	温度(K)	密度(kg/m^3)
空气	250	1.394 7	L 二醇	300	1111.4
	300	1.161 4	氟利昂	280	1 374.4
氧气	300	1.284	润滑油	300	884.1
氮气	300	1.123 3	甘油	300	1 259.9
氢气	300	0.080 78	水银	300	13 529
一氧化碳	300	1.123 3	纯水	288	999.1
二氧化碳	300	1.773 0	纯水	278	1 000.0
氦气	300	0.162 5			
水蒸汽	400	0.554 2			

对单一组分的流体，如水、空气等，其密度随压强与温度而改变，密度的改变量为

$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial p}dp + \frac{\partial \rho}{\partial T}dT = \rho\gamma_T dp - \rho\beta dT,$$

其中

$$\gamma_T = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T$$

称为等温压缩系数，

$$\beta = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p$$

称为热膨胀系数.

等温压缩系数表示在一定温度下压强增加一个单位时，流体密度的相对增加率. 因此它是衡量流体可压缩性的一个物理量. 由于比容 v 为密度 ρ 的倒数：$v\rho = 1$，因此

$$\gamma_T = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T.$$

该式表示，等温压缩系数表示在一定温度下压强增加一个单位时流体体积的相对缩小率.

等温压缩系数 γ_T 的倒数为体积弹性模量 E：

$$E = \frac{1}{\gamma_T} = \rho\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T = -v\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T. \tag{1.1.1}$$

它表示流体体积的相对变化所需的压强增量.

表 1.3 是一些常见流体的等温压缩系数 γ_T 及体积弹性模量 E 的值. 由表可见，在常温下的水，当压强增大 1 大气压，($1.013\times10^5\ N/m^2$)时，体积仅缩小

(或密度仅增大)约万分之零点五,即 $d\rho/\rho = 0.49\times10^{-4}$. 一般液体的等温压缩系数也较小,因而可以认为大多数液体是很难压缩的. 对于气体,若可用完全气体的状态方程 $p=\rho RT$ 描述,则 $\gamma_T = 1/p$. 因此,例如,当气压由 1 大气压变化至 1.1 大气压时,密度的增加率 $d\rho/\rho = dp/p = 0.1$,可见气体的可压缩性比液体大得多.

严格说来,实际流体都是可以压缩的,只是程度不同而已. 但在流体力学中,为了处理问题的方便,常将压缩性很小的流体近似看为不可压缩流体;它的密度可看作为常数(密度视为不变),否则就是可压缩流体. 这里所指密度视为不变,自然是指同一流体的密度不变.

表 1.3　一些常见流体的 γ_T 及 E 值

流　体	$\gamma_T 10^{-11}$ (m^2/N)	$E10^9$ (N/m^2)
二氧化碳	64	1.56
酒精	110	0.909
甘油	21	4.762
水银	3.7	27.03
水	49	2.04

依式(1.1.1),密度视为不变意味着

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} \approx \gamma_T \Delta p$$

并视为一小量. 这可以有两种方式使其满足,一是流体的等温压缩系数 γ_T 很小(或体积弹性模量很大),即使压强的变化相当大,所引起的密度变化仍然很小. 例如,在通常压强变化下的液体运动,均认为是不可压缩的(流动). 另一种是压强的变化充分小,以致等温压缩系数并不太小时,密度的变化却还是很小. 例如,空气的压缩虽然比较大,但在低速(小于 100m/s)运动时,压强的变化仍相当小,这时空气运动亦可视为不可压缩流动(见第三章第 10 节). 反之,在水下爆炸等问题中,由于压强变化相当大,却需将这时水运动视为可压缩流动.

热膨胀系数表示在一定压强下,温度增加 1 K 时流体密度的相对减小率. 与等温压缩系数类似,它也可写为

$$\beta = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \tag{1.1.2}$$

它表示在一定压强下,温度增加 1 K 时流体体积的相对增加率.

表 1.4 给出一些液体的热膨胀系数. 它们是从附录(D)表 $D2$ 中选取的,在一个大气压下,当温度从 273 K 变至 373 K 时,水的体积仅增加 4.3%. 而对气体,由完全气体状态方程可得

$$\beta = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_{p} = \frac{1}{T},$$

这表明,当温度由原温度变化 1/10 时,体积的增加率

$$dV/V = \beta dT = dT/T = 0.1,$$

可见气体的热膨胀系数比液体大得多.

表 1.4 一些液体的热膨胀系数

液体	温度(K)	$\beta \cdot 10^3(K^{-1})$
润滑油	300	0.7
乙二醇	300	0.65
甘 油	300	0.48
氟利昂	300	2.75
水 银	300	0.181
饱和水	300	0.276

(四) 流体的输运性质

如果物质由于某种原因处于非平衡态,那么系统会通过某种机理,产生一种自发的过程,使之趋向一个新的平衡态. 例如,当流体各层间速度不同时,通过动量传递,速度趋向均匀;当流体各处温度不均匀时,通过能量传递,温度趋向均匀;当流体各部分密度不同时,通过质量传递,密度趋向均匀. 流体这种由非平衡态转向平衡态时物理量的传递性质,统称为流体的输运性质.

流体的这种输运性质,从微观上看,其发生是通过分子的热运动及分子的相互碰撞,分子在无规则运动中,将原先所在区域的流体宏观性质输运到另一个区域,再通过分子的相互碰撞,交换、传递了各自的物理量,从而形成新的平衡态.

流体的输运性质,这里主要指动量输运、能量输运、质量输运. 从宏观上看,它们分别表现为粘滞现象、导热现象、扩散现象,并具有各自的宏观规律.

1. 动量输运——粘滞现象

考虑一平行于 x 轴的水平流动,当各层流体的速度不同时,任意两层流体之间将互施作用力以阻碍各层流体之间的相对运动,这种现象称为粘滞现象.

1687 年 I. 牛顿首先发表了他的剪切流动的实验结果,他的实验是在两相距 h 的平行平板之间充满粘性流体后进行的. 令下平板固定不动而使上平板在其自身平面内以等速 U 向右运动,则附于上下平板的流体质点其速度分别为 U 及 0. 两平板间的速度分布如图 1.4 所示.

实验指出,如果作用于上平板使之产生等速度 U 的外力为 F,则该力与速度 U 及平板面积 A 成正比,与平板间距 h 成反比,即

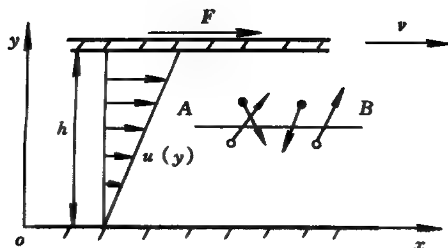


图 1.4　粘滞现象

$$F = \mu \frac{U}{h} A \tag{1.1.3}$$

或

$$\tau = \frac{F}{A} = \mu \frac{U}{h} \tag{1.1.4}$$

其中 U/h 是速度梯度. 一般而言,当速度分布为 $u(y)$时,流体层 y 处的剪切力

$$\tau = \mu \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} \tag{1.1.5}$$

其中$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$为速度梯度,$\mu$ 是比例系数,称为粘度系数,或动力粘度(性)系数,其值随流体不同而不同. 这就是著名的一维粘性流动的牛顿粘性定律.

在国际单位制中应力的单位为帕(或 Pa),即每平方米上受 1 牛顿力,速度梯度的单位为 s^{-1},故 μ 的单位为 Pa·s 或 1 N·s/m^2,亦即 1 kg/(m·s). 在 CGS 制中 μ 的单位为 g/(cm·s),又称泊,它与帕的关系为 1 Pa·s=10 泊.

1860 年 J.C. 马克斯韦尔首先对粘性气体的牛顿公式给出了理论解释. 根据气体分子动理学,气体分子的速度由平均速度与热运动速度两部分组成,前者是气体质点的宏观速度,而后者则是气体分子的微观随机运动速度. 若相邻两层气体,以各自的宏观速度 u 运动时,由于分子的随机运动及分子碰撞,而产生动量的交换,上层流体宏观运动速度大,交换中使上层流体减少动量,下层流体宏观运动速度小,交换中使下层流体增加动量,依动量定理,两层气体间就产生一对平行于运动速度方向的力,即剪应力. 对上层流体,该力与运动速度方向相反,是一个阻碍流体运动的力;对上层流体,该力与运动速度方向相同,是一个帮助流体运动的力. 因此这一对力是一种内摩擦力,或作用于流体的粘性力(图 1.4). 这也就是产生粘滞现象的原因.

利用气体动理学理论可粗略估计流体的粘度系数 μ.

考虑最简单的剪切流动情况如图 1.4 所示. 速度 u 的分布为线性的,假定速度梯度为 α_v,则 y 处的速度 $u=\alpha_v y$,取任意平行平面 AB,由于分子的随机热

运动,AB 下面的分子将向上运动,上面的分子将向下运动,如果令 AB 上面与下面的分子分别带有正动量与负动量,则动量输运将使上面的宏观速度减小,下面的宏观速度增加,使上下层速度趋于相等.

如果每单位体积中含有 N 个气体分子,它们的热随机平均速度为 c,为了简便,假定沿 x、y、z 方向各有 $N/3$ 个气体分子以速度 c 运动,在每单位体积有 $N/3$ 个气体分子沿 y 方向的运动中,又假定有一半即 $N/6$ 是向上运动的,另一半是向下运动的,它们均具有速度 c. 这样每单位时间每单位体积各有 $Nc/6$ 个分子穿过 AB 向上运动和向下运动.

如果每一分子的质量为 m,各分子穿过 AB 时的宏观平均速度相当于距 AB 平面 L 处的速度 $u=\alpha_v L$,其中 L 为分子平均自由程,这样每一分子的平均动量为 $mL\alpha_v$,每单位时间每单位面积有 $NcmL\alpha_v/6$ 的正动量输运向下,同样数量的负动量输运向上,即共有 $NcmL\alpha_v/3$ 的动量交换,这给出了 AB 平面上的剪应力. 根据牛顿粘性定律,此剪应力为 $\mu\alpha_v$. 考虑到 Nm 为单位体积的质量,即气体的密度 ρ,于是有

$$\mu = \frac{1}{3}\rho cL$$

1932 年 D. 恩斯科格与 S. 查普曼作了更详细的计算. 他们给出 $\mu = 0.499\rho cL$,其中 L 为分子平均自由程,c 为分子的平均随机速度.

液体的微观结构与气体的不同,液体的粘度系数与分子在平衡位置附近的振动(或定居)时间有关. 振动时间长即平衡位置的变换次数少,其流动性小,粘性就大,反之,其流动性大,粘性就小. 通常液体的粘度系数较气体的大得多,而且粘度系数随温度的变化也与气体的迥异. 对于液体,温度升高时,分子间的间隙增大,吸引力减小,定居时间减小,粘度系数也减小,这与气体正好相反:气体温度增高,热运动加剧、动量交换加快,粘性增大.

在通常情况下,压强对流体粘度系数的影响很小,但在高压作用下流体的粘度系数均随压强的增加而增加.

在流体力学中,除了用(动力)粘度系数 μ 外,还常用到运动粘度系数或动量扩散率 ν,它是粘度系数 μ 与流体密度 ρ 之比:

$$\nu = \mu/\rho,$$

ν 的单位是 m^2/s.

表 1.5 是一些流体的粘度系数 μ 及运动粘度系数 ν 值. 它们是从附录(D)的表 D.1 与表 D2 中选取的. 由表看到,空气、水粘度系数 μ 较小,润滑油、甘油粘度系数 μ 较大.

表 1.6 及 1.7 为空气和饱和水随温度变化的粘度系数值. 它们是分别从附

录(D)的表 D.1 与表 D.3 中选取的.

表 1.5 一些流体的粘度系数 μ 及运动粘度系数 ν 值

流体	温度(K)	粘度系数 $\mu\cdot10^7(N\cdot s/m^2)$	运动粘度系数 $\nu\cdot10^6(m^2/s)$
空气	300	184.6	15.87
氨	300	101.5	14.7
二氧化碳	300	149	8.4
一氧化碳	300	175	15.6
氦	300	199	122
氢	300	89.6	111
氮	300	178.2	15.86
氧	300	207.2	16.14
水蒸气	400	134.4	24.25
润滑油	300	48.6×10^5	550
乙二醇	300	1.57×10^5	14.1
甘 油	300	79.9×10^5	634
氟利昂	300	0.0254×10^5	0.195
水 银	300	0.1523×10^5	0.1125

表 1.6 空气粘度系数随温度的变化

温度(K)	$\mu\cdot10^7(N\cdot s/m^2)$
250	159.6
300	184.6
350	208.2
400	230.1
500	270.1
600	305.8
700	338.8
800	369.8

表 1.7 饱和水粘度系数随温度的变化

温度(K)	$\mu_f\cdot10^6(N\cdot s/m^2)$
273.15	1 750
300	855
310	695
320	577
330	489
340	420
350	365
360	324
370	289

粘性常作另一种解释. 在式(1.1.5)中取 $u=\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, $\gamma=\mathrm{d}x/\mathrm{d}y$,则(1.1.5)式可表为

$$\tau=\mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\mu\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}=\mu\dot{\gamma}. \qquad (1.1.6)$$

由于 $\dot{\gamma}$ 可理解为剪切应变率,故上式表示剪应力与剪切应变率成正比. 在同一剪应力作用下,对粘度系数 μ 大的流体,所产生的剪切应变率,比对粘度系数 μ 小的流体要小. 因此,常常把流体的粘性,认为是流体的一种抵抗变形的能力.

由(1.1.6)式还可看到,流体所产生的剪切应变率愈小,引起剪切变形所需的剪应力也愈小.在应变率无限小的情况下,随便多么小的剪应力都可引起流体很大的变形.只有当流体不受任何剪应力作用的情况下,流体才能处于完全静止的状态.这构成了流体有别于固体的一种性质:易流动性.并且常常把流体定义为,在任何微小的剪应力作用下能持续不断产生变形的物质.

实际流体都是有粘性的,但若流体的粘度系数很小,而且流场中速度梯度不大,那么,这时流场中出现的粘性力很小,可以将这种流体流动近似认为是无粘性流动.无粘性流体(流动)的概念虽然是人为的,但却能清晰地揭示出许多流动的主要特性,因此,研究无粘性流动在流体力学基础理论中,占有重要位置.

还应指出,由实验所得的牛顿粘性定律并非对所有流体都成立.能满足这一定律的流体只是一些分子结构简单的流体,如空气、水等.实验表明,很多流体的剪应力与剪切应变率之间不满足线性关系(1.1.6)式.通常将剪应力与剪切应变率之间满足线性关系的流体,称为牛顿流体.而把不满足这一关系的流体,称为非牛顿流体.

非牛顿流体极为普遍,食品工业中的奶油、蜂蜜、蛋白、果浆;建筑材料中的沥青、水泥浆;大多数油类及润滑脂、高分子聚合物溶液、树胶;动物血液等均是非牛顿流体.对它们的利用、加工和输送,都必须涉及其性质,因此非牛顿流体力学近年有很快发展.

非牛顿流体的应变率 $\dot{\gamma}$ 与剪应力 τ 的关系常用下式表示,

$$\dot{\gamma} = f(\tau). \tag{1.1.7}$$

对牛顿流动,$\tau/\dot{\gamma}$ 表示为粘度系数 μ.对于非牛顿流动,

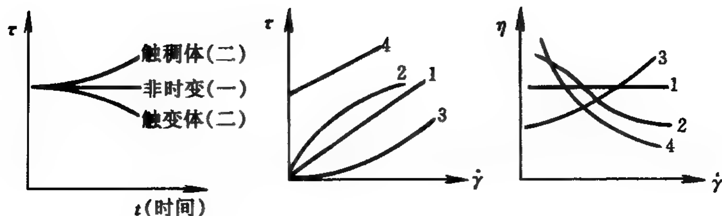
$$\eta = \tau/\dot{\gamma} \tag{1.1.8}$$

称为表观粘度.η 与 μ 不同,η 不是一个物质常数,它既与 $\dot{\gamma}$ 有关,又与 τ 有关.但 η 与 μ 有相同的量纲.

非牛顿流体分为三类:

一类是非时变性非牛顿流体,这类流体的剪应力仅与应变率有关,或者说表观粘度仅与应变率(或剪应力)有关、与时间无关:$\eta=\eta(\dot{\gamma})$.(图 1.5).主要有伪塑性流体(应变率愈大,η 愈小,流动性愈好,如橡胶)、膨胀型流体(与上相反,如玉米面糊)、粘塑性流体(剪应力超过屈服值才产生流动,如水泥浆).

第二类是时变性非牛顿流体,这类流体的表观粘度不仅与应变率有关,而且与剪切作用持续时间有关.一般认为,在流体受剪切时,内部结构被破坏,并有一个调整时间.力学性质受结构变化的影响,随之变化,直到新的平衡结构形成为止.非时变性非牛顿流体调整快,因此与时间无关,时变性非牛顿流体调整缓慢,就与时间有关.(图 1.5).主要有触变体(η、τ 随剪切时间变小,如油漆)和触稠体(与上相反,如石膏水溶液).



(一):非时变性流体　(二):时变性流体

1.牛顿流体　2.伪塑性流体(一)　3.膨胀型流体(一)　4.粘塑性流体(一)

图 1.5　牛顿流体与非牛顿流体

第三类是粘弹性流体,其特征是既具粘性又有弹性效应. 例如,尼龙丝受拉伸即发生流动性的伸长,除去拉力,立即弹性地作一定程度的收缩后,再缓慢地收缩. 这说明粘弹性体受力作用时,产生弹性变形并作粘性流动的双重效应.

对线性粘弹性流体,应力和应变及其导数之间呈线性关系,其粘性效应用牛顿粘性定律描述,弹性效应用虎克定律描述. 总的应变率为

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2 = \frac{\tau}{\mu} + \frac{\dot{\tau}}{G} \tag{1.1.9}$$

其中 μ 为动力粘度系数,G 为剪切模量,$\dot{\tau}$ 为剪应力对时间的导数. 满足方程(1.1.9)的流体称为麦克斯韦流体.

非牛顿流体有与牛顿流体不同的流动特性,例如粘塑性流体在管中流动时有一固体核心(无相对运动,近管壁则有速度梯度);粘弹性流体有沿旋转棒向上爬的倾向;其自管中流出时有挤出物膨胀现象;有开口虹吸现象,等等. 如图 1.6.

2. 热能输运——热传导现象

流体中的传热现象通常以三种方式进行,热传导、热辐射及热对流. 前者是由于分子的热运动所产生的热能输运现象,而后两者分别是由于电磁波辐射及随流体的宏观运动产生的热迁移现象,前两者即使在静止流体中也存在,而后者则仅存在于流体运动之中.

当静止流体中的温度分布不均匀时,流体的热能通过分子热运动从较高温的区域传递到较低温的区域,这种现象称为热传导现象.

1822 年,J.B. 傅里叶首先进行了最简单的热传导实验(图 1.7),得到了傅里叶定律. 设在流体中相距为 Δy 的上下两平面上,温度分别稳定地保持为 $T(y+\Delta y)$及 $T(y)$,且 $T(y+\Delta y)>T(y)$,由于分子的热运动,单位时间内将有热量 Q_y 从上方传至下方,其大小与截面积 A 和两平面温度差 $T(y+\Delta y)-T(y)$成正比,与两平面距离 Δy 成反比,即

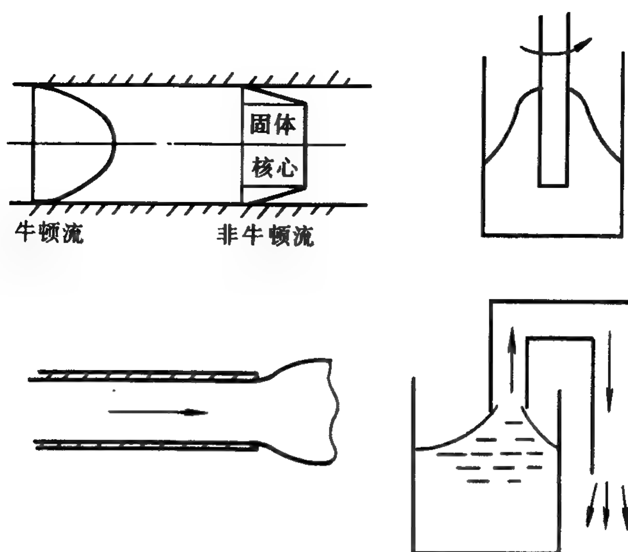


图 1.6　非牛顿流体流动

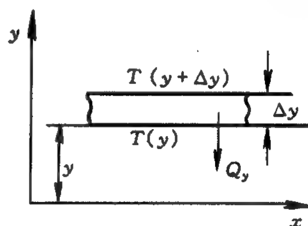


图 1.7　热传导现象

$$Q_y \propto A \frac{T(y+\Delta y) - T(y)}{\Delta y},$$

当 $\Delta y \to 0$ 时有热流量

$$Q_y = -kA \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}y},$$

或每单位面积的热流量

$$q_y = \frac{Q_y}{A} = -k \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}y}, \qquad (1.1.10)$$

其中 k 为流体的热传导系数(导热系数). 负号表示热量(或热流量)的流向与温度梯度方向相反. 这就是定常一维热传导的傅里叶定律.

单位时间热量的单位为瓦(w=J/s),每单位面积热流量的单位为 w/m^2,温度梯度的单位为 K/m,导热系数 k 的单位为:

$$\frac{\mathrm{w}}{\mathrm{m}^2}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{K}} = \mathrm{w}/(\mathrm{m} \cdot \mathrm{K}).$$

(1.1.10)式的更一般的情况,当温度在空间呈三维不均匀分布时,介质的热传导性为各向同性时,有每单位面积的热流量矢量 $\boldsymbol{q}$

$$\boldsymbol{q} = -k \nabla T, \qquad (1.1.11)$$

其中∇T 为温度对于空间坐标的梯度.

气体热传导的微观机理与粘性完全类似，是分子平均热运动能交换的结果．应用气体分子动理学理论也可以粗略地计算出热传导系数与微观量的关系：

$$k = \frac{1}{3}\rho c c_v L = \mu c_v.$$

其中 c_v 为气体的定容比热．

更精确的计算给出 $k/(\mu c_v)$ 约为 2，对空气，温度为 288 K 时实测结果 $k/(\mu c_v)=1.96$．

液体的热传导系数来自两方面的贡献，与固体的类似．主要是依靠分子在其平衡位置附近作小振幅的热振动．在温度较高的区域，分子振动的热能相当大，它会将热能传递给它邻近的分子，如此逐层传递下去就形成热传导．另一种是分子在较分子间距大得多的范围内运动所产生的热传导．在通常情况下，后者的贡献虽然比较小，但远大于零．一般说来，液体的热传导系数仅略依赖于温度而与压强几乎无关．它的数值约较气体的大 1～2 个量级．

表 1.8 为几种常见流体的热传导系数．它们是从附录(D)的表 D.1 与表 D.2 中选取的．

表 1.8 一些流体的热传导系数

流体	温度(K)	$k\cdot10^3$ (w/mK)
空气	300	26.3
二氧化碳	300	16.55
氧	300	26.8
水蒸气	400	26.1
润滑油	300	145
甘油	300	286
水银	300	8540

3．质量输运——扩散现象

当流体的密度分布不均匀时，流体的质量就会从高密度区迁移到低密度区，这种现象称为扩散现象．它们又可分为两类，一类是在单组分流体中，由于其自身密度差所引起的扩散，称为自扩散．另一类是在两种组分的混合介质(如气体或液体与可溶固体，二不相混的液体等)中，由于各组分的各自密度差在另一组分中所引起的扩散，称为互扩散．一般说来，在解决实际问题中互扩散远较自扩散更为重要．

自扩散　当流体分子进行动量与热能交换，也同时伴有质量的交换，因之质

量输运的机理与动量和热能输运的机理完全相同. 假定在流体中存在一密度分布 $\rho(y)$,其梯度为 $\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}y$,由于分子的热运动,流体将从上方迁移到下方,如图 1.8 所示,单位时间所输运的质量与截面积 A 和密度梯度 $\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}y$ 成正比,单位时间每单位面积上的输运

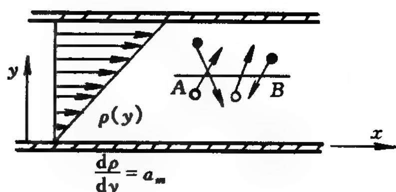


图 1.8 扩散现象

$$j = -D\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}y}, \tag{1.1.12}$$

其中 D 为自扩散系数,负号表示质量的流向与密度梯度方向相反. 与粘度系数和热传导系数一样,可计算出

$$D = \frac{1}{3}cL, \tag{1.1.13}$$

因而相比较有 $\mu = \rho D$. 根据更精确的计算,J. H. Jeans(琼斯)的理论给出 $\rho D/\mu = 1.34$. S. 查普曼理论给出 $\rho D/\mu = 1.336$. 而实测的则在 1.3~1.5 之间.

互扩散 1855 年,A. 菲克(Fick)首先发表了双组分混合物互扩散的实验结果,他考虑由组分 A 与 B 组成的混合物系统,各组分均由其各自的高密度区向低密度区扩散,这里为了简便,假定组分 B 为均质介质,仅考虑组分 A 在组分 B 中的扩散,他的实验结果表明,组分 A 的定常扩散率与它的密度梯度和截面积成正比,或单位时间每单位面积的质量流量与密度梯度成正比

$$j_{AB} = -D_{AB}\frac{\mathrm{d}\rho_A}{\mathrm{d}y}, \tag{1.1.14}$$

其中 j_{AB} 与 D_{AB} 分别为组分 A 在组分 B 中每单位面积的质量流量及扩散系数,通常称这为一维定常的第一菲克扩散定律.

(1.1.14)式更一般的情况,当密度在空间呈三维不均匀分布时,介质的质量扩散为各向同性时,有每单位面积的质量流量矢量

$$\boldsymbol{j}_{AB} = -D_{AB}\nabla\rho_A \tag{1.1.15}$$

其中 $\nabla\rho_A$ 为组分 A 的密度梯度.

在国际单位制中,扩散系数的量纲为 m^2/s,它与粘度系数和热传导系数不同,它的大小依赖于压强、温度和混合物的成分. 一般说来,液体的扩散系数较气体的小几个数量级. 表 1.9、与表 1.10 是几种物质在空气和水中的扩散系数. 它们均取自附录(D)中的表 D.5

与传热现象相类似,传质现象除了分子输运以外,还有对流传质,并且根据流动的性质分为受迫对流传质与自由对流传质.

表 1.9　几种物质在空气中的扩散系数

溶质	溶剂	温度(K)	D_{AB} (m^2/s)
水	空气	298	0.26×10^{-4}
二氧化碳	空气	298	0.16×10^{-4}
氧	空气	298	0.21×10^{-4}
丙酮	空气	273	0.11×10^{-4}
苯	空气	298	0.88×10^{-5}
萘	空气	300	0.62×10^{-5}

表 1.10　几种物质在水中的扩散系数

溶质	溶剂	温度(K)	D_{AB} (m^2/s)
食盐	水	288	1.1×10^{-9}
葡萄糖	水	298	0.69×10^{-9}
酒精	水	298	0.12×10^{-8}
甘油	水	298	0.94×10^{-9}

从上面的讨论可以清楚地看出,流体的动量、热能和质量三种输运性质,从微观的角度看,它们的形成机理是相似的,都是通过分子的热运动及分子的相互碰撞,输运了它们原先所在区域的宏观性质,从而使原先区域的状态不平衡渐渐趋向状态平衡. 同时在宏观上具有类似的表达式,即

粘性　$\tau=\mu\dfrac{du}{dy}$　牛顿定律

热传导　$q=-k\dfrac{dT}{dy}$　傅里叶定律

扩散　$j_{AB}=-D_{AB}\dfrac{d\rho_A}{dy}$　菲克第一定律

(每单位面积的动量、热量或质量流量 = 常数 × 势梯度).

这三种输运过程另一共同点是均为不可逆过程,同时这些分子输运现象主要在层流流动中考虑,一旦流动为湍流,由于湍流输运远较分子输运强烈,分子输运常常予以忽略.

* (五)表面张力与毛细现象

液体表面具有一种不同于液体内部的特殊性质:在液体内部,相邻液体间的相互作用表现为压力,而在液体表面,界面上液体间的相互作用表现为张力. 由于这种力的存在,引起弯曲液面内外出现压强差以及常见的毛细现象等. 这些特性在讨论毛细波及毛细流等问题中是必须考虑的.

1. 表面张力

许多现象表明,液体表面有自动收缩的趋势,例如,取一一边可以自由滑动的矩形钢丝框架,将框架浸入肥皂液内片刻后取出,框架上就会形成一个肥皂

膜,如沿自由滑动边不加外力,肥皂膜就将自动收缩,这表明,肥皂膜上存在着张力.

设想在上述液面内画一截线,截线两边的液面存在着相互作用的拉力,此力与截线垂直并与该处液面相切,这种力称为液体的表面张力.

若截线长为 L,则由实验表明,表面张力的大小与液面的截线长度 L 成正比,即

$$T = \sigma L. \tag{1.1.16}$$

式中 σ 称为表面张力系数,它表示液面上单位长度截线上的表面张力,其大小主要由物质种类决定,其单位为 $\mathrm{N\cdot m^{-1}}$. 表 1.11 是一些物质的表面张力系数值. 表 1.12 是饱和水的表面张力系数随温度变化的情况. 后者取自附录(D)中的表D.3. 由两表看出,表面张力系数还与液体相邻的物质种类以及液面温

表 1.11 一些液体的表面张力系数

液 体	温度(K)	$\sigma(10^{-3}\mathrm{Nm^{-1}})$
水与空气	291	73
水银与空气	291	490
水银与水	293	472
酒精与空气	291	23
乙醚与空气	293	16.5
肥皂水与空气	293	40

表 1.12 饱和水的表面张力系数与温度的关系

温度(K)	$\sigma\times10^3$(N/m)
273	75.5
290	73.7
310	70.0
350	63.2
400	53.6

度有关. 温度愈高,σ 愈小. 从微观角度看,液体表面的这种作用并不在一个真正的几何面上,而是在一个厚度为分子有效作用距离(数量级为 10^{-9}m)的薄层上,此薄层称为表面层. 考虑表面层中任意一个分子 B(图 1.8). 若以 B 为心,以分子力有效作用距离为半径作一分子力作用球,则此球有一部分落在液体之外,因而表层内的分子 B 与在液体内部的分子 A 相比,缺少了一些能吸引它的分子,这些引力的合力是指向下的,这使液面有尽量收缩的趋势,至于分子间的斥力作用,由于斥力有效作用距离很短,除了液体的极表层之外,表面层中的分子斥力作用球全部淹没在液体内部,因此,在表面层中的其它分子对 B 点的斥力作用是互相抵消的,这与液体内部 A 点的斥力作用相同. 由于斥力与引力的这种差异,导致了表面张力的产生.

2. 弯曲液面下的压强差

肥皂泡、水中的气泡、液滴以及固体与液体相接触的地方,液面都是弯曲的. 在某些情形下可能是凸液面,如液滴、水银温度计中的水银面;而在另一些情形下可能是凹液面,如水中的气泡,细玻璃管中的水面等. 由于表面张力的存在,液面内及液面外有一压强差,形成附加压强. 在凸液面时,附加压强为正,即液面内的压强大于液面外的压强(常为大气压);在凹液面时则反之,此附加压强可通过对液面的受力分析计算出来(图 1.9). 设在任意弯曲的液面上取一点 O,作 ON 垂直于曲面,过 ON 作互相垂直的两平面,与曲面相交于两截线 A_1B_1 及 A_2B_2,并分别设 A_1B_1 及 A_2B_2 两截线的曲率半径为 $OC_1 = R_1, OC_2 = R_2$,再过点 O 液面作一微曲线四边形 $DEFG$(图 1.10). 分析曲线四边形受力情况,略去重力,由表面张力及附加压强力取得平衡就有式

$$\Delta p = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \tag{1.1.17}$$

(1.1.17)称为拉普拉斯公式. 应注意,当曲率中心在液内时,相应曲率半径取正值;当曲率中心在液外时,相应曲率半径取负值.

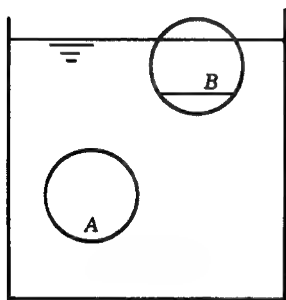


图 1.9 液体表面层受力分析

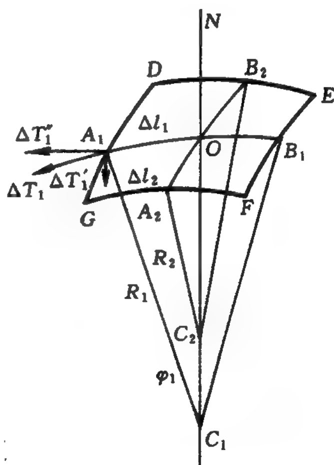


图 1.10 曲面上的表面张力

若弯曲液面为球面时,$R_1 = R_2 = R$,从而 $\Delta p = 2\sigma/R$. 当弯曲液面为柱面时,$R_1 = R, R_2 = \infty, \Delta p = \sigma/R$,若此柱面由 $\zeta = \zeta(x)$ 给出,则曲率半径 R 有关系式

$$\frac{1}{R} = \frac{\zeta_{xy}}{(1 + \zeta_x^2)^{3/2}}, \tag{1.1.18}$$

式中下标表示取导数.

3. 毛细现象

当液体及固体表面接触时,接触处会产生一种表面现象(图 1.11). 例如水在玻璃上是散开的,水银在玻璃上是收缩成球形的. 这样就说,水是润湿玻璃的,水银是不润湿玻璃的. 为表明润湿或不润湿的程度,引入接触角的概念. 在液体、固体壁和空气交界处作液体表面的切面,此面与固体壁在液体内部所夹的角度 θ 就称为这种液体对该固体的接触角. 当 θ 为锐角时,液体润湿固体;当 θ 为钝角时,液体不润湿固体. 若 $\theta=0$,则液体完全润湿固体;若 $\theta=\pi$,则液体完全不润湿固体,水与洁净玻璃的 $\theta=0$,水银与玻璃的 $\theta=138°$.

润湿不润湿决定于液体与固体的性质,即由固液分子之间的相互吸引力(称附着力)大于或小于液液分于之间的相互吸引力(称内聚力)这一因素决定。设液体与固体接触处,沿固体壁有一层液体,称附着层,其厚度等于液体分子间引力的有效作用距离和液固分子间引力的有效作用距离的较大者. 当附着力大于

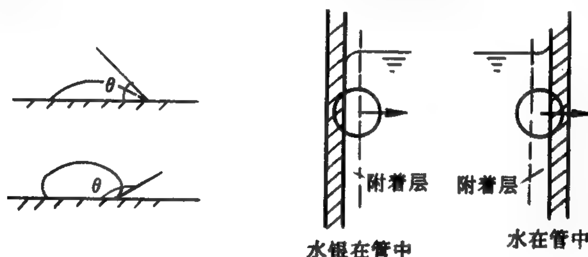


图 1.11 液体的润湿与接触角

内聚力时,液体分子在附着层内所受的合力垂直于附着层且指向固体,液体分子倾向挤入附着层,沿附着层扩展,从而润湿固体. 反之,当内聚力大于附着力时,附着层内的较多的液体分子被吸引到液体内部,附着层呈收缩倾向,呈现不润湿现象.

将细管插入液体后管内水面会升高或下降,这种现象称为毛细现象。产生这一现象的管子称毛细管,毛细现象是由表面张力及接触角所决定的。

在液体润湿管壁的情况下,毛细管刚插入液体中时,由于接触角为锐角,液面就变为凹面,使液面下方 B 点(图 1.12)的压强比液面上方的大气压小,而在与 B 点同高的平液面处的 C 点的压强仍与液面上的大气压相等. 根据液体静力学原理,同高两点的压强应相等,因此液面不能平衡而要在管中上升,直至 B 点与 C 点压强相等为止. 设细管截面为圆形,则凹面可以近似地看作半径为 R 的球面,因此依式(1.1.17),A 点的压强比大

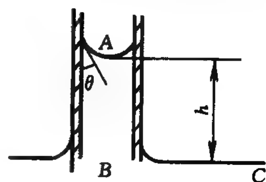


图 1.12 毛细原理

气压 p_0 小一量 $2\sigma/R$，即

$$p = p_0 - 2\sigma/R.$$

式中 σ 是表面张力系数. 再由液体静力学原理，$p_B = p_C = p_A + \rho gh$，故 $2\sigma/R = \rho gh$. 设 r 为毛细管半径，则因

$$R = r/\cos\theta, \tag{1.1.19}$$

其中 θ 为接触角，因此

$$h = 2\sigma\cos\theta/(\rho gr). \tag{1.1.20}$$

该式表明 h 与 σ 成正比，与 r 成反比，并与 θ 有关. 因此，管子愈细，h 愈大.

同样，对液体不润湿的情况，管中液面下降，下降的距离 h 同样由式(1.1.20)计算，只是 θ 为钝角，h 为负值.

1.2 描述流体运动的方法

本节介绍流体运动物理量的描述方法，这是研究流体运动时，首先必须考虑的.

描述流体物理量有两种方法，一种是给每一流体质点以一个不同的标记(例如，根据连续介质假设，在 $t = t_0$ 时刻，质点在空间占有一空间点，于是该质点可以以 $t = t_0$ 时刻的空间坐标三个数来作标记)，流体质点的物理量就表示为该标记及时间的函数. 另一种是将流体物理量表示为空间点及时间的函数. 根据连续介质假设，流体所占区域的空间点在某一时刻必被一流体质点所占有，因而流体在该空间点上的物理量，实际上就是某一流体质点在某一时刻的物理量，这种描述法并不去追究该物理量属于哪一质点的.

以下将详细介绍这些描述方法.

(一) 拉格朗日坐标与欧拉坐标

在流体力学中通常采用两种坐标，即拉格朗日坐标与欧拉坐标，来表示流体的运动.

为了识别运动流体中的一个质点，我们以一组数(a, b, c)作为其标记，即不同的质点以不同的数(a, b, c)表示，我们称这组数(a, b, c)为拉格朗日(Lagrange)坐标或随体(数组(a, b, c)跟随该质点)坐标. 拉格朗日坐标可以(且常常)以质点初始时刻 $t = t_0$ 时的位置坐标(x_0, y_0, z_0)来表示. 显然，流体质点不管什么时候运动到哪里，其拉格朗日坐标并不因此而改变.

为了表示流体质点在不同时刻运动到空间的一个位置，我们以一固定于空间的坐标系的一组坐标(q_1, q_2, q_3)来表示该位置，由于根据连续性假设，流体质点是连续地布满流体所占空间的，因此可以认为流体质点与空间点从而也与

一组坐标(q_1,q_2,q_3)是一一对应的,我们称这组坐标为欧拉(Euler)坐标或空间坐标. 欧拉坐标可以用直角坐标 x,y,z 或柱坐标,r,θ,z 或球坐标R,θ,λ 来表示. 显然,同一时刻不同流体质点处于不同的空间位置上因而具有不同的空间坐标,它们于初始时刻又分别在不同的空间位置从而有不同的随体坐标,因此,欧拉坐标与拉格朗日坐标是既不同又有关的.

为了描述和研究流体质点的物理量的函数关系,可以采用拉格朗日坐标与欧拉坐标,并分别称之为拉格朗日描述及欧拉描述.

(二) 拉格朗日描述

拉格朗日描述也称随体描述,它着眼于流体质点,并将流体质点的物理量认为是随流体质点及时间变化的,也就是说,它把流体质点的物理量表示为拉格朗日坐标及时间的函数. 设拉格朗日坐标为(a,b,c),以此坐标表示的流体质点的物理量,如矢径、速度、压强等等在任一时刻 t 的值,便可以写为 a,b,c 及 t 的函数.

若以 f 表示流体质点的某一物理量,其拉格朗日描述的数学表达是

$$f = f(a,b,c,t). \tag{1.2.1}$$

例如,设时刻 t 流体质点的矢径即 t 时刻流体质点的位置以 $\boldsymbol{r}$ 表示,其拉格朗日描述为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(a,b,c,t) \tag{1.2.2}$$

或

$$x_i = x_i(a,b,c,t),\quad i = 1,2,3$$

或

$$x = x(a,b,c,t),$$
$$y = y(a,b,c,t),$$
$$z = z(a,b,c,t).$$

它表示拉格朗日坐标为$(a,b,c,)$的流体质点在时刻 t 处于$\boldsymbol{r}$,即空间点(x,y,z)的位置.

同样,质点的速度的拉格朗日描述是

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(a,b,c,t).$$

由于质点速度是该质点矢径 $\boldsymbol{r}$ 的时间变化率,因而有

$$\boldsymbol{v}(a,b,c,t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(a,b,c,t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(a,b,c,t)}{\Delta t}$$
$$= \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} \tag{1.2.3}$$

或

$$v_i(a,b,c,t) = \frac{\partial x_i}{\partial t},\ i = 1,2,3,$$

或

$$u(a,b,c,t) = \frac{\partial x(a,b,c,t)}{\partial t},$$

$$v(a,b,c,t) = \frac{\partial y(a,b,c,t)}{\partial t},$$

$$w(a,b,c,t)=\frac{\partial z(a,b,c,t)}{\partial t}.$$

上式中在对 t 求导数时，以(a,b,c)标记的流体质点的速度正是该质点矢径的时间变化率，因而 a,b,c 在求导中是不变的.

质点的加速度的拉格朗日描述是

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(a,b,c,t),$$

即类似地，它是该质点于 t 时刻的速度的时间变化率，因而

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}(a,b,c,t)&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{v}(a,b,c,t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(a,b,c,t)}{\Delta t}\\&=\frac{\partial \boldsymbol{v}(a,b,c,t)}{\partial t}\\&=\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}(a,b,c,t)}{\partial t^2}\end{aligned}\tag{1.2.4}$$

或

$$\begin{aligned}a_i(a,b,c,t)&=\frac{\partial v_i(a,b,c,t)}{\partial t}\\&=\frac{\partial^2 r_i(a,b,c,t)}{\partial t^2}\quad i=1,2,3,\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}a_x(a,b,c,t)&=\frac{\partial u(a,b,c,t)}{\partial t}\\&=\frac{\partial^2 x(a,b,c,t)}{\partial t^2},\\a_y(a,b,c,t)&=\frac{\partial v(a,b,c,t)}{\partial t}\\&=\frac{\partial^2 y(a,b,c,t)}{\partial t^2},\\a_z(a,b,c,t)&=\frac{\partial w(a,b,c,t)}{\partial t}\\&=\frac{\partial^2 z(a,b,c,t)}{\partial t^2}.\end{aligned}$$

同样，压强 p 的拉格朗日描述是

$$p=p(a,b,c,t)$$

等等.

(三) 欧拉描述

欧拉描述也称空间描述，它着眼于空间点，认为流体的物理量随空间点及时间而变化，也就是说，它把流体物理量表示为欧拉坐标及时间的函数. 设欧拉坐标为(q_1,q_2,q_3)，用欧拉坐标表示的各空间点上的流体物理量如速度、压强等等，在任一时刻 t 的值，可写为 q_1,q_2,q_3 及 t 的函数. 从数学分析知道，当某时刻一个物理量在空间中每一点上的值确定时，即某时刻一个物理量在空间的分

布一旦确定,我们就说,该物理量在此空间形成一个场. 因此,欧拉描述实际上描述了一个个物理量的场.

应该指出,由于某时刻在空间点(q_1,q_2,q_3)上必有一流体质点占据,因此,在流体占有的空间点上的物理量,即欧拉描述的物理量实际上也就是占据该空间点的流体质点的物理量.

若以 f 表示流体的一个物理量,其欧拉描述的数学表达是(设空间坐标取用直角坐标)

$$f = F(x,y,z,t) = F(\boldsymbol{r},t). \tag{1.2.5}$$

例如,流体速度的欧拉描述是

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(x,y,z,t) \tag{1.2.6}$$

或

$$v_i = v_i(x,y,z,t), \quad i = 1,2,3,$$

或

$$u = u(x,y,z,t),$$
$$v = v(x,y,z,t),$$
$$w = w(x,y,z,t).$$

它表示在空间点(x,y,z)上在时刻 t 的流体速度. 自然,这个速度是某一流体质点的. 不过,这里并未显示出这一速度是属于哪个质点的,知道的只是,在时刻 t 运动到空间点(x,y,z)的那个流体质点有速度$\boldsymbol{v}(x,y,z,t)$.

同样,压强的欧拉描述是

$$p = p(x,y,z,t)$$

等等.

由于欧拉描述实际上提供了一个个物理量的场,如速度场、压强场,因此运用场论这个数学工具来研究流体力学成为很自然的事. 此外,用欧拉描述对研究流体力学很多实际问题带来方便(如需求作用于某一面上的压强合力等,就可在该面上对压强求积分,等等),因此,在流体力学中,空间描述成为主要的描述方法.

(四) 拉格朗日描述与欧拉描述之间的关系

拉格朗日描述着眼于流体质点,将物理量视为随体坐标与时间的函数;欧拉描述着眼于空间点,将物理量视为空间坐标与时间的函数. 但它们既然可以描述同一物理量,必定互相有关. 设表达式 $f=f(a,b,c,t)$表示流体质点(a,b,c)在 t 时刻的物理量;表达式 $f=F(x,y,z,t)$表示空间点(x,y,z)上于时刻 t 的同一物理量. 如果设想流体质点(a,b,c)恰好在 t 时刻运动到空间点(x,y,z)上,则应有

$$x = x(a,b,c,t),$$
$$y = y(a,b,c,t),$$
$$z = z(a,b,c,t),$$

$$F(x,y,z,t)=f(a,b,c,t). \tag{1.2.7}$$

事实上,将(1.2.2)式代入(1.2.7)式左端,即有

$$\begin{aligned}&F(x,y,z,t)\\&=F[x(a,b,c,t),y(a,b,c,t),z(a,b,c,t),t]\\&=f(a,b,c,t)\end{aligned} \tag{1.2.8}$$

或者如果反解(1.2.2)式,得到

$$\begin{aligned}a&=a(x,y,z,t),\\b&=b(x,y,z,t),\\c&=c(x,y,z,t).\end{aligned} \tag{1.2.9}$$

(上式存在的条件是函数行列式

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(a,b,c)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial a}&\frac{\partial y}{\partial a}&\frac{\partial z}{\partial a}\\\frac{\partial x}{\partial b}&\frac{\partial y}{\partial b}&\frac{\partial z}{\partial b}\\\frac{\partial x}{\partial c}&\frac{\partial y}{\partial c}&\frac{\partial z}{\partial c}\end{vmatrix} \tag{1.2.10}$$

既不为零,也不为无穷).将(1.2.9)式代入(1.2.7)式之右端,也应有

$$\begin{aligned}&f(a,b,c,t)\\&=f[a(x,y,z,t),b(x,y,z,t),c(x,y,z,t),t]\\&=F(x,y,z,t).\end{aligned}$$

由此,设已知拉格朗日描述,则由 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(a,b,c,t)$及 $f=f(a,b,c,t)$,先反解 $\boldsymbol{r}$ 得(1.2.9)式,将之代入 $f=f(a,b,c,t)$,便可得到欧拉描述.

同样,设已知欧拉描述,$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(x,y,z,t)$及 $f=F(x,y,z,t)$,因没有式(1.2.2),可先由

$$\boldsymbol{v}=\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$$

或

$$\begin{cases}u(x,y,z,t)=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\\v(x,y,z,t)=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\\w(x,y,z,t)=\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t},\end{cases} \tag{1.2.11}$$

积分得

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(c_1,c_2,c_3,t) \tag{1.2.12}$$

或

$$\begin{cases}x=x(c_1,c_2,c_3,t),\\y=y(c_1,c_2,c_3,t),\\z=z(c_1,c_2,c_3,t).\end{cases}$$

再由初始条件 $t=t_0$ 时,$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{A}=(a,b,c)$,即可解得 c_1,c_2,c_3 依赖于 a,b,c 的表达式

$$\begin{cases} c_1 = c_1(a,b,c,t_0), \\ c_2 = c_2(a,b,c,t_0), \\ c_3 = c_3(a,b,c,t_0). \end{cases}$$

将之代入(1.2.12)便得

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(a,b,c,t) \tag{1.2.2}$$

或

$$\begin{aligned} x &= x(a,b,c,t), \\ y &= y(a,b,c,t), \\ z &= z(a,b,c,t). \end{aligned}$$

将此代入 $f=F(x,y,z,t)$,就可得 f 的拉格朗日描述.

(五) 随体导数

我们常常要求流体质点的物理量随时间的变化率,例如,要求流体质点的加速度,它是流体质点速度随时间的变化率. 这种流体质点物理量随时间的变化率称为随体导数,或物质导数,质点导数. 不言而喻,它意味着是跟随流体质点运动时观测到的质点物理量的时间变化率.

按拉格朗日描述,物理量 f 表为$f=f(a,b,c,t)$,f 的随体导数就是跟随质点(a,b,c)的物理量 f 对时间 t 的导数(这时 a,b,c 是不变的),即$\partial f/\partial t$. 例如:速度$\boldsymbol{v}(a,b,c,t)$是矢径 $\boldsymbol{r}(a,b,c,t)$对时间的偏导数

$$\boldsymbol{v}(a,b,c,t) = \frac{\partial \boldsymbol{r}(a,b,c,t)}{\partial t},$$

即随体导数就是偏导数。加速度 $\boldsymbol{a}(a,b,c,t)$是速度$\boldsymbol{v}(a,b,c,t)$对时间的偏导数

$$\boldsymbol{a}(a,b,c,t) = \frac{\partial \boldsymbol{v}(a,b,c,t)}{\partial t},$$

即随体导数就是偏导数。这已如(1.2.3)及(1.2.4)式所示.

按欧拉描述,物理量 f 表为$f=F(x,y,z,t)$,但$\partial F/\partial t$ 并不表示随体导数,它只表示物理量在空间点(x,y,z)上的时间变化率(f 取自(x,y,z)这一点). 而随体导数必须是跟随 t 时刻位于(x,y,z)空间点上的那个流体质点,其物理量 f 的时间变化率(这个 f 取自同一流体质点,而非取自同一空间点(x,y,z)). 由于该流体质点是运动的,即 x,y,z 是变的. 若以 a,b,c 表示该流体质点的拉格朗日坐标,则 x,y,z 将依式(1,2.2)式变化,从而 $f=F(x,y,z,t)$的变化依连锁法则处理. 因此,物理量 $f=F(x,y,z,t)$的随体导数是

$$\frac{\mathrm{D}F(x,y,z,t)}{\mathrm{D}t}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}F[x(a,b,c,t),y(a,b,c,t),z(a,b,c,t),t] \\
&= \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial t} \\
&= \frac{\partial F}{\partial x}u+\frac{\partial F}{\partial y}v+\frac{\partial F}{\partial z}w+\frac{\partial F}{\partial t} \\
&= (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)F+\frac{\partial F}{\partial t}, \qquad (1.2.13)
\end{aligned}
$$

其中 D/Dt 表示随体导数,在上式推导中已用了(1.2.3)式. 式(1.2.13)表明,求质点物理量的随体导数,欧拉描述与拉格朗日描述大不相同. 前者是两者之和,一项是$\partial F/\partial t$,它表示 x,y,z 不变时,在该空间点上的物理量的时间变化率,称为局部导数,它是由物理量不定常性造成的(对定常场该项为零). 另一项$\boldsymbol{v}\cdot\nabla F$ 称为位变导数,它表示在非均匀的 f 场中(有梯度∇F),由空间位置变化(有$\boldsymbol{v}$)引起的. 为了说明这一点,我们取时间间隔$(t,t+\Delta t)$,在此 Δt 内,位于(x,y,z)处的流体质点,将沿$\boldsymbol{v}(x,y,z,t)$的方向移动距离近似为$|\boldsymbol{v}|\Delta t$,由于在$\boldsymbol{v}(x,y,z,t)$方向单位长度上的 f 的改变量为$(\boldsymbol{v}/|\boldsymbol{v}|)\cdot\nabla F$,于是在此方向上,在距离$|\boldsymbol{v}|\Delta t$ 上的f 的改变量即为$|\boldsymbol{v}|\Delta t((\boldsymbol{v}/|\boldsymbol{v}|)\cdot\nabla F)=\boldsymbol{v}\cdot\nabla F\Delta t$,因此在单位时间内 f 的变化率为$\boldsymbol{v}\cdot\nabla F$.

显然,若(1)$\boldsymbol{v}=0$,即流体静止;(2) f 是均匀场,这时$\nabla F=0$(但 F 可随时间变化);(3)$\boldsymbol{v}$ 沿等F 面方向,即流体质点沿等 F 面运动,$\boldsymbol{v}\perp\nabla F$,则上述随体导数中的位变导数等于零.

运用式(1.2.13),流体质点的加速度是流体质点速度$\boldsymbol{v}(x,y,z,t)$的随体导数:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}(x,y,z,t) &= \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}(x,y,z,t)}{\mathrm{D}t} \\
&= \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} \\
&= (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} \qquad (1.2.14)
\end{aligned}
$$

或

$$
\begin{aligned}
a_x &= \frac{\mathrm{D}u(x,y,z,t)}{\mathrm{D}t}=(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)u+\frac{\partial u}{\partial t}, \\
a_y &= \frac{\mathrm{D}v(x,y,z,t)}{\mathrm{D}t}=(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)v+\frac{\partial v}{\partial t}, \\
a_z &= \frac{\mathrm{D}w(x,y,z,t)}{\mathrm{D}t}=(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)+\frac{\partial w}{\partial t}.
\end{aligned}
$$

任何流体质点物理量,不管是标量还是矢量,其随体导数都类似于式(1.2.13)或(1.2.14),因此就有公式

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}=\frac{\partial}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla). \tag{1.2.15}$$

这在流体力学中是十个重要的基本公式. 只要流体质点的物理量采用欧拉描述,其随体导数即质点物理量的时间变化率,就将采用这一公式进行计算.

例 1.1 已知拉格朗日描述

$$\begin{cases} x = a\mathrm{e}^{t}, \\ y = b\mathrm{e}^{-t}, \end{cases}$$

求速度与加速度的欧拉描述。

解 速度与加速度的拉格朗日描述为

$$u=\frac{\partial x}{\partial t}=a\mathrm{e}^{t},\qquad v=\frac{\partial y}{\partial t}=-b\mathrm{e}^{-t},$$

$$a_x=\frac{\partial u}{\partial t}=a\mathrm{e}^{t},\qquad a_y=\frac{\partial v}{\partial t}=b\mathrm{e}^{-t}.$$

再由已知条件得

$$a=x\mathrm{e}^{-t},\quad b=y\mathrm{e}^{t}.$$

将此代入上式便得速度与加速度的欧拉描述:

$$u=a\mathrm{e}^{t}=x, v=-b\mathrm{e}^{-t}=-y,$$

$$a_x=a\mathrm{e}^{t}=x, a_y=b\mathrm{e}^{-t}=y.$$

也可由(1.2.14)式得加速度的欧拉描述:

$$a_x=\frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t}=x,\quad a_y=\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t}=y.$$

例 1.2 设已知欧拉描述

$$u=x, v=-y$$

和初始条件 $t=0$ 时 $x=a, y=b$,求速度和加速度的拉格朗日描述.

解 这时先由

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u=x,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v=-y$$

解出

$$x=c_1\mathrm{e}^{t},\quad y=c_2\mathrm{e}^{-t},$$

再利用初始条件得

$$c_1=a,\qquad c_2=b,$$

因而有

$$x=a\mathrm{e}^{t},\qquad y=b\mathrm{e}^{-t}.$$

代回已知关系就得

$$u=x=a\mathrm{e}^{t},\qquad v=-y=-b\mathrm{e}^{-t},$$

再由此得

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} = a\mathrm{e}^t, \quad a_y = \frac{\partial v}{\partial t} = b\mathrm{e}^{-t}.$$

例 1.3　已知速度的拉格朗日表示

$$u = 1 + b, \quad v = 2ct, \quad w = a - b,$$

求(1) $t=1$ 时流体质点的分布规律；

(2) $(a,b,c)=(1,1,1)$这一质点的运动规律；

(3) 质点加速度及其分布.

解　(1) 由式

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1 + b, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2ct, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = a - b.$$

积分得

$$x = (1+b)t + c_1,$$
$$y = ct^2 + c_2,$$
$$z = (a-b)t + c_3.$$

代入初始条件 $t=0$ 时$(x,y,z)=(a,b,c)$，得

$$c_1 = a, c_2 = b, c_3 = c.$$

由此 $t=0$ 时刻质点的空间坐标为

$$x = (1+b)t + a,$$
$$y = ct^2 + b, \tag{a}$$
$$z = (a-b)t + c.$$

当 $t=1$ 时，$t=0$ 时位于(a,b,c)的质点在

$$x = 1 + b + a,$$
$$y = b + c,$$
$$z = a - b + c.$$

(2) $(a,b,c)=(1,1,1)$这一质点的运动规律为

$$x = 2t + 1, \quad y = t^2 + 1, \quad z = 1.$$

(3) 质点的加速度用(1,2,4)式给出

$$a_x = 0, \quad a_y = 2c, \quad a_z = 0, \tag{b}$$

但要求加速度的分布必须将上式转到欧拉描述，为此需将(a)式反解出 a,b,c：

$$a = \frac{(1+t^3)x - ty + t^3 z - t - t^4}{1 + t^3 + t^4},$$

$$b = \frac{t^3 x + y - t^2 z - t^4}{1 + t^3 + t^4},$$

$$c = \frac{-tx + t(t+1)y + z + t^2}{1 + t^3 + t^4}.$$

将之代入加速度的表达式(b)，就得加速度的空间分布

$$a_x = 0,$$

$$a_y = \frac{2[-tx + (t+1)ty + z + t^2]}{1 + t^3 + t^4},$$

$$a_z = 0.$$

建议本节参看录像Ⅰ—1与Ⅳ—13中的有关部分.

1.3 迹线、流线、时间线及脉线

为了形象地从几何上了解特定流体质点和整体运动情况,本节讨论迹线、流线、时间线及脉线.

(一) 迹线

所谓流体质点的迹线就是流体质点运动的轨迹,也就是该流体质点在不同时刻的运动位置的联线. 显然,迹线的概念直接与拉格朗日描述相联系,而且式(1.2.2)就是迹线的参数式方程. 因此,有了(1.2.2)式,实际上也就得到了流体质点的迹线. 在例1.1中矢径表达式

$$x = ae^{t}, \qquad y = be^{-t},$$

即为参数式迹线方程,也可消去 t 得

$$xy = ab.$$

这是一条平面双曲线,初始时位于(a,b)这一点的流体质点将循此曲线运动.

由于在流体力学中通常采用欧拉描述,例如,给出速度$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(x,y,z,t)$,这时,要得到迹线就要复杂一些,但大致上也就是寻求式(1,2,12)的过程. 这里,把(1,2,11)式写成整齐一点的形式是

$$\frac{dx}{u(x,y,z,t)} = \frac{dy}{v(x,y,z,t)} = \frac{dz}{w(x,y,z,t)} = dt \qquad (1.3.1)$$

通常就说它是寻求迹线的微分方程,解之即可得到迹线方程,其积分常数由某时刻的质点位置确定.

例1.4 在例1.2中已知

$$u = x, \quad y = -y,$$

其迹线微分方程为

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y},$$

积分之,即得 $xy = c_1$. 若初始时,质点位于空间点(a,b)上,则 $c_1 = ab$. 得迹线 $xy = ab$.

例1.5 已知

$$u = x - 2y, \qquad v = x - y, \qquad w = 0,$$

求其迹线方程。

解 因 $dx/dt = x - 2y$ 式中x,y都是t的函数,不能直接积分,但

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = (x-2y) - 2(x-y) = -x,$$

积分之,得

$$x = c_1\cos t + c_2\sin t.$$

再由 $u = x - 2y$,有

$$y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)$$
$$= \frac{1}{2}(c_1 - c_2)\cos t + \frac{1}{2}(c_1 + c_2)\sin t,$$
$$z = c_3.$$

当 $t=0,(x,y,z)=(a,b,c)$,所以

$$c_1 = a,$$
$$c_2 = a - 2b,$$
$$c_3 = c.$$

代入得

$$\therefore \begin{cases} x = a\cos t + (a-2b)\sin t, \\ y = b\cos t + (a-b)\sin t, \\ z = c. \end{cases}$$

上式即为所求迹线方程。

(二) 流线

流线是用来描述流场中各点流动方向的曲线。它是某时刻速度场中的一条矢量线,即在线上任一点的切线方向与该点在该时刻的速度矢量方向一致. 显然,流线的概念直接与欧拉描述相联系. 为了寻求流线方程,假设在某时刻 t_0,在一流线上取一段弧元素 $\delta \boldsymbol{r}$,由流线定义,应有

$$\delta \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = 0.$$

在直角坐标系中,这方程就是

$$\frac{\delta x}{u(x,y,z,t_0)} = \frac{\delta y}{v(x,y,z,t_0)} = \frac{\delta z}{w(x,y,z,t_0)}. \tag{1.3.2}$$

这就是 t_0 时刻的流线微分方程,将之积分即得 t_0 时刻的流线方程. 应注意的是,在上式积分中 t_0 是常量;积分常数由流线所经空间点而定.

需要强调,流线是指在某一时刻的,而迹线是某一质点的. 在某一空间点上,一流体质点将沿该时刻的流线方向运动,并在此流线上留下了一微段迹线,但此后由于流动的不定常性,速度方向可能变了,原质点将依新的流线方向运动,又在新的流线上留下了一微段迹线,如此继续下去. 可见流线与迹线一般是不会重合的. 只是当在流线上留下一微段迹线后,速度方向仍然不变,该质点仍依原流线方向运动(例如对定常运动,但对非定常运动只要速度方向仍不变),并

继续下去. 那么,流线与迹线就重合在一起. 例 1.4 是定常运动,故流线方程也将与迹线方向相同.

例 1.6 给定速度场

$$u = x + t, \qquad v = -y - t,$$

求(1) $t=1$ 时过(1,1)点的质点的迹线;

(2) 过(1,1)点的流线.

解 (1)由迹线微分方程

$$\frac{dx}{dt} = x + t, \quad \frac{dy}{dt} = -y - t$$

积分得

$$x = c_1e^t - t - 1, \qquad y = c_2e^{-t} - t + 1.$$

当 $t=1$ 时,过$(x,y)=(1,1)$的质点有

$$c_1 = 3/e, \quad c_2 = e.$$

最后得此质点的迹线方程为

$$x = 3e^{t-1} - t - 1, \quad y = e^{1-t} - t + 1.$$

(2) 由流线方程

$$\frac{dx}{x+t} = \frac{dy}{-y-t}$$

积分得

$$(x+t)(y+t) = c_1.$$

过(1,1)空间点有

$$c_1 = (1+t)^2,$$

故此流线方程为

$$(x+t)(y+t) = (1+t)^2.$$

若当 $t=1$ 时,此流线方程为

$$(x+1)(y+1) = 4.$$

由此例知,流线与迹线不一致.

例 1.7 试由

$$u = -tx, \quad v = t(y+1)$$

求迹线与流线.

解 迹线及流线微分方程均为

$$\frac{dx}{-tx} = \frac{dy}{t(y+1)}.$$

消去 t,积分得迹线与流线方程

$$x(y+1) = c.$$

本例为不定常流动,但迹线与流线为同一条曲线.

这里顺便介绍一下流面与流管的概念,这是流线概念的延伸.在某时刻,在

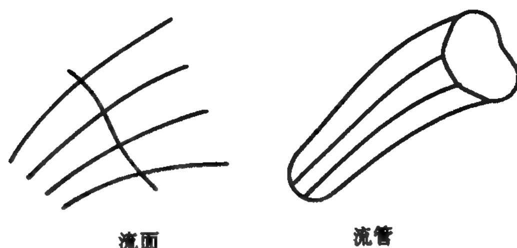


图 1.13 流面与流管

速度场中作一条非流线的曲线,经该曲线上每一点作流线,则这些流线在空间就形成一个面,这个面称流面.若所作非流线的曲线本身是封闭的,则由此封闭曲线所作流面,称为流管.(图 1.13).

(三) 时间线

时间线是某时刻 t_0 在流场中任意取的一条线,该线上的每个流体质点在 t 时刻运动到新的位置上的连线,也常称流体线.

很明显,时间线与迹线密切相关,组成时间线的流体质点,将各自沿该质点的迹线运动,并于某一时刻各自到达一新的位置,组成该时刻的时间线.

因此,时间线的求法,可以利用迹线的求法来得到.

除时间线以外,还可以有时间面及时间体,这很容易从时间线推广得到.

例 1.8 设流体质点依

$$x = ae^{t},$$
$$y = be^{-t}$$

规律运动.$t=0$ 时有流体线 $x=a$,求 $t=1$ 时的流体线。

解 显然流体质点是在 $xy=ab$ 曲线上运动,$t=0$ 时 $x=a$ 时间线($y=b$ 任意)在 $t=1$ 时已运动到 $x=ae$($y=b/\mathrm{e}$),故该时时间线为 $x=ae$(图 1.14).

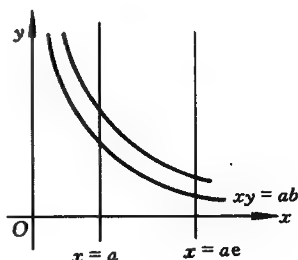


图 1.14 时间线

(四) 脉线

脉线是在一段时间内,将相继经过某一空间固定点的流体质点,在某一瞬时(即观察瞬时)连成的曲线.如果该空间固定点是施放染色的源,则在某一瞬间即可观察到一条染色线.故脉线也称染色线.

经过烟头或燃香冒出的烟,或经过烟囱冒出的烟,都是脉线的例子. 在流动显示试验中,染色液、烟丝、氢气泡等显示的流动图像,也都是脉线.

脉线方程可借助拉格朗日方法导出,设流体质点(a,b,c)在时刻 t_1 经过固定点(x_1,y_1,z_1),在时刻 t 到达空间点(x,y,z),于是,应用拉格朗日描述(1.2.2)式有

$$\begin{cases} x_1 = x(a,b,c,t_1), \\ y_1 = y(a,b,c,t_1), \\ z_1 = z(a,b,c,t_1). \end{cases} \tag{1.3.3}$$

及

$$\begin{cases} x = x(a,b,c,t), \\ y = y(a,b,c,t), \\ z = z(a,b,c,t). \end{cases} \tag{1.2.2}$$

由式(1.3.3)解出 a,b,c:

$$\begin{cases} a = a(x_1,y_1,z_1,t_1), \\ b = b(x_1,y_1,z_1,t_1), \\ c = c(x_1,y_1,z_1,t_1). \end{cases}$$

将上式代入式(1.2.2)有

$$\begin{aligned} x &= x(a,b,c,t) \\ &= x[a(x_1,y_1,z_1,t_1),b(x_1,y_1,z_1,t_1),c(x_1,y_1,z_1,t_1),t] \\ &= x'(x_1,y_1,z_1,t_1,t), \\ y &= y'(x_1,y_1,z_1,t_1,t), \\ z &= z'(x_1,y_1,z_1,t_1,t). \end{aligned}$$

该式表示,在不同时刻 t_1 经过同一固定点(x_1,y_1,z_1)的各流体质点在 t 时刻的位置,这就是脉线方程。

例 1.9 设速度场为

$$u = x/t, \quad v = y, \quad w = 0.$$

求经过空间固定点(x_1,y_1,z_1)在 t 时刻的脉线方程.

解 先求出迹线. 由

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t}, \ \frac{dy}{dt} = y, \ \frac{dz}{dt} = 0$$

解得迹线为

$$x = a\frac{t}{t_0}, \ y = be^{t-t_0}, \ z = c, \tag{a}$$

其中 a,b,c 为 t_0 时刻的 x,y,z. 由上式解出 a,b,c:

$$a = \frac{t_0}{t}x, \ b = ye^{t_0-t}, \ c = z. \tag{b}$$

设 t_1 时刻,质点(a,b,c)到达固定点(x_1,y_1,z_1),则有

$$a=\frac{t_0}{t_1}x_1,\quad b=y_1\mathrm{e}^{t_0-t_1},\quad c=z_1. \tag{c}$$

将(c)式代入(a)式,得

$$x=\frac{t}{t_1}x_1, y=y_1\mathrm{e}^{t-t_1},\ z=z_1. \tag{d}$$

这就是经过空间固定点(x_1,y_1,z_1)的各流体质点(以不同的 t_1 代表不同流体质点),在时刻 t 的位置,即脉线方程.

取 $x_1=0.1$, $y=0.1$, z_1 任意, $0.2\leqslant t_1\leqslant 1, t=1$.

由计算知,在 $t_1=0.2$ 时位于(0.1,0.1)的流体质点,将经由迹线 abc,现时

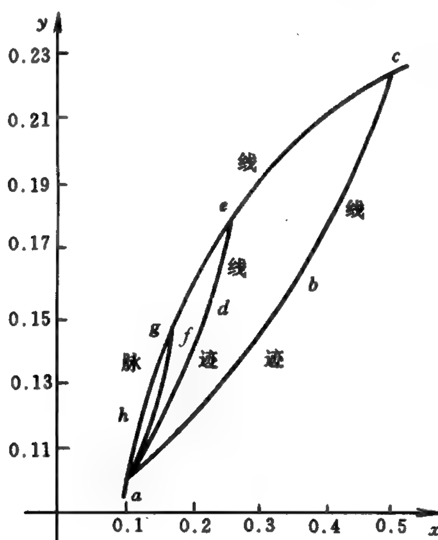


图 1.15　例 1.9 图

$(t=1)$已到达点 c,在 $t_1=0.4$ 时位于(0.1,0.1)的流体质点将经由迹线 ade,现已到达 e 点,在 $t_1=0.6$ 时位于(0.1,0.1)的流体质点将经由迹线 afg,现已到达 g 点、如此等等(图 1.15). 于是在 $0.2<t_1<1$ 的时段内,先后经过(0.1,0.1)这一固定点的流体质点,将依其各自的迹线,在 $t=1$ 时刻到达 $c\cdots,e,\cdots,g,\cdots$ 各点,连线 $cegha$。即是经固定点(0.1,0.1)在时间(0.2,1)内的脉线.

依式(d),c,e,g,h 各点的位置分别是

c 点:$x=\dfrac{t}{t_1}x_1=\dfrac{1}{0.2}0.1=0.5$,

$\quad y=y_1\mathrm{e}^{t-t_1}=0.1\mathrm{e}^{1-0.2}=0.222$;

e 点：$x=\frac{t}{t_1}x_1=\frac{1}{0.4}0.1=0.25$，

$y=y_1 e^{t-t_1}=0.1e^{1-0.4}=0.182$；

g 点：$x=\frac{t}{t_1}x_1=\frac{1}{0.6}0.1=0.167$，

$y=y_1 e^{t-t_1}=0.1e^{1-0.6}=0.149$；

h 点：$x=\frac{t}{t_1}x_1=\frac{1}{0.8}0.1=0.125$，

$y=y_1 e^{t-t_1}=0.1e^{1-0.8}=0.122$.

由本例看出，一般来说，在不定常运动中，脉线、迹线及流线是不重合的，而在定常运动时，三者是重合的.

1.4 流场中一点邻域的相对运动分析

流体的运动虽然相当复杂，但取一微元体，分析其中的运动，将可得出一些规律性的认识.

(一) 速度分解

在时刻 t 的流场中取一点 $M_0(\boldsymbol{r})=M_0(x,y,z)$ 邻域中的任一点 $M(\boldsymbol{r}+\delta\boldsymbol{r})=M(x+\delta x,y+\delta y,z+\delta z)$（图 1.16），设 M_0 点的速度为 $\boldsymbol{v}(M_0)$，由泰勒展开式，当 $|\delta\boldsymbol{r}|$ 为小量时，邻点 M 的速度

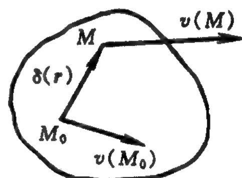


图 1.16 一点邻域的速度

$$\boldsymbol{v}(M)=\boldsymbol{v}(M_0)+\delta\boldsymbol{v}$$

$$=\boldsymbol{v}(M_0)+\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z}\mathrm{d}z \tag{1.4.1}$$

或分量形式

$$\begin{cases} u(M)=u(M_0)+\delta u \\ \qquad\quad =u(M_0)+\dfrac{\partial u}{\partial x}\delta x+\dfrac{\partial u}{\partial y}\delta y+\dfrac{\partial u}{\partial z}\delta z, \\ v(M)=v(M_0)+\delta v \\ \qquad\quad =v(M_0)+\dfrac{\partial v}{\partial x}\delta x+\dfrac{\partial v}{\partial y}\delta y+\dfrac{\partial v}{\partial z}\delta z, \\ w(M)=w(M_0)+\delta w \\ \qquad\quad =w(M_0)+\dfrac{\partial w}{\partial x}\delta x+\dfrac{\partial w}{\partial y}\delta y+\dfrac{\partial w}{\partial z}\delta z. \end{cases}$$

显然，$\delta\boldsymbol{v}$ 或 $(\delta u,\delta v,\delta w)$ 是 M 点相对于 M_0 点的相对运动速度．它可用矩

阵表示：

$$\begin{bmatrix}\delta u\\ \delta v\\ \delta w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z}\\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta x\\ \delta y\\ \delta z\end{bmatrix}. \tag{1.4.2}$$

将上式中的方阵分解为两个方阵：

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z}\\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z}\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right) & \frac{\partial w}{\partial z}\end{bmatrix}\\ &+\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\right)\\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right) & 0\end{bmatrix}\\ &=\boldsymbol{S}+\boldsymbol{A}.\end{aligned} \tag{1.4.3}$$

上式等式右端第一个矩阵 $\boldsymbol{S}$ 是对称的，第二个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是反对称的.

反对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的九个分量中只有三个独立分量，即 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$：

$$\begin{aligned}\omega_1&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right),\\ \omega_2&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right),\\ \omega_3&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right).\end{aligned} \tag{1.4.4}$$

这三个分量恰好构成速度矢量的旋度(差因子$\frac{1}{2}$)：

$$\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{2}\nabla\times\boldsymbol{v},$$

且有

$$\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\right)\\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right) & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta x\\ \delta y\\ \delta z\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_2 \delta z - \omega_3 \delta y \\ \omega_3 \delta x - \omega_1 \delta z \\ \omega_1 \delta y - \omega_2 \delta x \end{bmatrix}. \tag{1.4.5}$$

上式右端表示是一个矢量，且它等价于矢量积

$$\boldsymbol{\omega} \times \delta \boldsymbol{r} = \frac{1}{2}(\nabla \times \boldsymbol{v}) \times \delta \boldsymbol{r}.$$

(1.4.5)式表明，相对运动速度 $\delta \boldsymbol{v}$ 的一部分为$\frac{1}{2}(\nabla \times v) \times \delta \boldsymbol{r}$.

我们将会在下面看到，它代表的是流体绕 M_0 点的瞬时转动轴旋转时，在 M 点引起的速度。

矩阵 $\boldsymbol{S}$ 的九个分量中只有六个独立分量，它与 $\delta \boldsymbol{r}$ 之乘积$\boldsymbol{S} \cdot \delta \boldsymbol{r}$ 作为相对运动速度 $\delta \boldsymbol{v}$ 之另一部分，我们也将在下面看到，它表示流体变形在 M 点引起的速度.

将两部分速度代回原式(1.4.1)，有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}(M) &= \boldsymbol{v}(M_0) + \delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(M_0) + (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{S}) \cdot \delta \boldsymbol{r} \\ &= \boldsymbol{v}(M_0) + \frac{1}{2} \mathrm{rot} \boldsymbol{v} \times \delta \boldsymbol{r} + \boldsymbol{S} \cdot \delta \boldsymbol{r}. \end{aligned} \tag{1.4.6}$$

它表示，M 点的速度是与 M_0 点相同的平动速度 $\boldsymbol{v}(M_0)$、绕 M_0 点转动在 M 点引起的速度$\frac{1}{2}\mathrm{rot}\ \boldsymbol{v} \times \delta \boldsymbol{r}$ 及因流体变形在 M 点引起的速度 $\boldsymbol{S} \cdot \delta \boldsymbol{r}$ 三者之和. 这就是所谓的亥姆霍兹(Helmholtz)速度分解定理.

式(1.4.3)式中矩阵 $\boldsymbol{S}$ 及矩阵 $\boldsymbol{A}$ 在流体力学中也称二阶张量，并以 $\boldsymbol{S}$ 及 $\boldsymbol{A}$ 或 S_{ij} 及 A_{ij} 表示. 根据速度分解的意义，$\boldsymbol{S}$ 称为应变率张量，$\boldsymbol{A}$ 称为旋转张量，而 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{S}$ 称为速度梯度张量式(1.4.3).

由此看出，与刚体比较，流体在一点邻域或一微元体内，流体运动有与刚体一样的平动及转动，另外还加一个特有的变形. 要再强调的是，式(1.4.6)在流体的一点邻域或在流体的微元体内，才成立. 由此可知，流体运动比刚体运动要复杂得多.

(二) 应变率张量及旋转张量各分量的意义

为理解应变率张量及旋转张量各分量的物理意义，考虑一些流体的特殊运动. 设流体微元为一正方体，边长为 $\delta x = \delta y = \delta z$，图 1.17a 为其一侧面 $ABCD$. 若点 A 的速度为 u, v(w 未画出，可类似分析)，则 B、C、D 各点的速度如图所示：

B 点：　$u + \frac{\partial u}{\partial x}\delta x$，　$v + \frac{\partial v}{\partial x}\delta x$；

D 点：　$u + \frac{\partial u}{\partial y}\delta y$，　$v + \frac{\partial v}{\partial y}\delta y$；

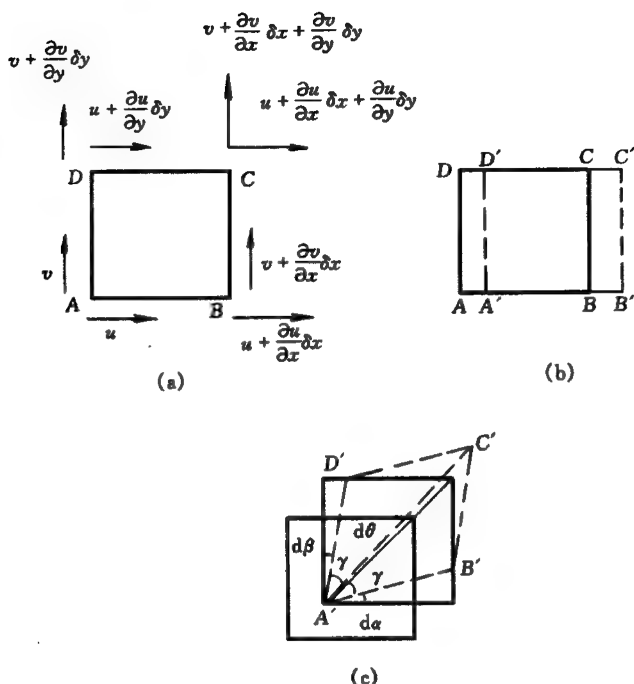


图 1.17　流体元的几种运动

C 点：　　$u+\dfrac{\partial u}{\partial x}\delta x+\dfrac{\partial u}{\partial y}\delta y,\quad v+\dfrac{\partial v}{\partial x}\delta x+\dfrac{\partial v}{\partial y}\delta y;$

这样，当经 Δt 时间后，上述正方体上各点将依各点速度运动，正方体将产生平移、旋转、剪切和膨胀(收缩)等各种运动。由此可看出应变率张量及旋转张量中各项的意义。

1. 相对伸长率(相对伸长速度)

首先设只有应变率张量中的

$$\frac{\partial u}{\partial x}\neq 0, u = u(x),$$

其他均为零．这样，经 Δt 时间后，$ABCD$ 将运动至 $A'B'C'D'$，线段 $AB=\delta x$ 将产生伸长(图 1.17b)，其相对伸长率为

$$\frac{\left(u+\dfrac{\partial u}{\partial x}\delta x\right)\Delta t-u\Delta t}{\delta x\Delta t}=\frac{\partial u}{\partial x},$$

因此$\dfrac{\partial u}{\partial x}$表示线段 δx 的相对伸长率．同理$\dfrac{\partial v}{\partial y}$、$\dfrac{\partial w}{\partial z}$也有类似的意义．另一方面，由于 δx、δy 及 δz 有伸长，则正方体体积将膨胀，经 Δt 时间后，正方体体积

$\delta x\delta y\delta z$ 已变为

$$\left(\delta x+\frac{\partial u}{\partial x}\delta x\Delta t\right)\left(\delta y+\frac{\partial v}{\partial y}\delta y\Delta t\right)\left(\delta z+\frac{\partial w}{\partial z}\delta z\Delta t\right),$$

其相对体积膨胀率为

$$\frac{\left(\delta x+\frac{\partial u}{\partial x}\delta x\Delta t\right)\left(\delta y+\frac{\partial v}{\partial y}\delta y\Delta t\right)\left(\delta z+\frac{\partial w}{\partial z}\delta z\Delta t\right)-\delta x\delta y\delta z}{\delta x\delta y\delta z\Delta t}$$

$$\approx\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\operatorname{div}\boldsymbol{v}\,.$$

该式表明,速度散度为微元体体积 $\delta x\delta y\delta z$ 的相对体积膨胀率,也就是三个方向的微线元相对伸长率之和.

对于不可压缩流体,即流体体积将不变(不膨胀不收缩),$\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0$,这是一个合理的结果.

2. 角变形率(速度)

现考虑只有应变率张量中的

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\neq 0,$$

这时,经 Δt 时间后,$ABCD$ 将运动至 $A'B'C'D'$(图 1.15c),产生了角变形. 角 $\angle BAD$ 的减小量为 $\mathrm{d}\alpha+\mathrm{d}\beta$,其平均角变形(剪切)率就是

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\alpha+\mathrm{d}\beta}{\Delta t}=\frac{1}{2}\left[\frac{\frac{\partial v}{\partial x}\delta x\Delta t}{\delta x\Delta t}+\frac{\frac{\partial u}{\partial y}\delta y\Delta t}{\delta y\Delta t}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

于是$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)$就是直角的平均减小率。而$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)$,$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)$也有类似的意义。

3. 转动角速度

最后考虑旋转张量中的三个分量. 由图(1.17c),在 $ABCD$ 运动至 $A'B'C'D'$时,对角线 AC 经 Δt 时间转动了角度

$$\mathrm{d}\theta=\gamma+\mathrm{d}\alpha-45^\circ.$$

但 $2\gamma+\mathrm{d}\alpha+\mathrm{d}\beta=90^\circ$,从而

$$\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}(\mathrm{d}\alpha-\mathrm{d}\beta),$$

其转动角速度即为

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\omega_3.$$

另两个量

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right),\ \omega_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

也有类似的意义. 它们三者一起组成了角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$,且有

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\mathrm{rot}\ \boldsymbol{v},$$

即速度旋度之半.

综上所述,可以看出,流体的应变率张量及旋转张量的九个分量,都有明确的物理含义,其中三个代表线段的相对伸长率(速度),三个代表角变形率(速度),三个代表流体本身的自转角速度. 另外,顺便也看到,速度散度 div $\boldsymbol{v}$ 代表了流体体积的相对膨胀率(速度).

为了进一步理解上述结论,我们来看一下几种典型的流动图像.

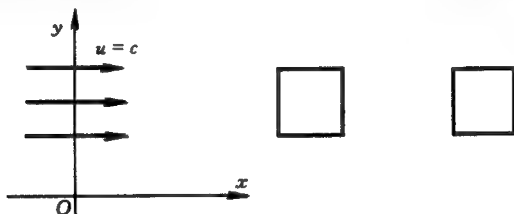


图 1.18　均匀流动

例 1.10　设

$$u = c,\quad v = 0,\quad w = 0,$$

则流动如图 1.18,其应变率张量 $\boldsymbol{S}$ 及旋转张量 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

即流动无变形(线变形、角变形),无旋转,它表示一种均匀流,微流体元只是平移.

例 1.11　设

$$u = cy,\quad v = 0,\quad w = 0,$$

则流动如图 1.19. 其 $\boldsymbol{S}$ 及 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 0 & c/2 & 0 \\ c/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & c/2 & 0 \\ -c/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

即流动无伸长、有角变形、有旋转,它是一种线性剪切流动. 需要指出的是,虽然流体质点作的是直线运动,但流动仍处处有旋。微元作剪切、旋转.

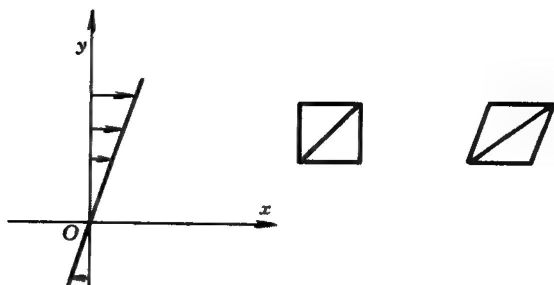


图 1.19 平行剪切流动

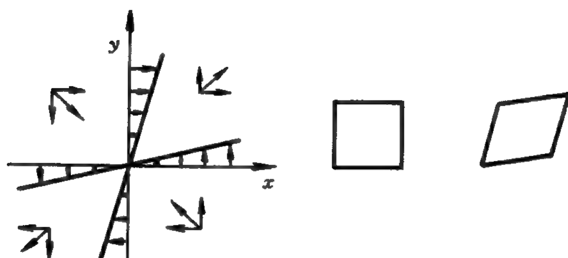


图 1.20 纯剪切流动

例 1.12 设

$$u = cy, \quad v = cx, \quad w = 0,$$

则流动如图 1.20 所示. 其 $\boldsymbol{S}$ 及 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 0 & c & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

即流动无伸长,有角变形,无旋转,它是一种纯剪切流动,微元作纯剪切.

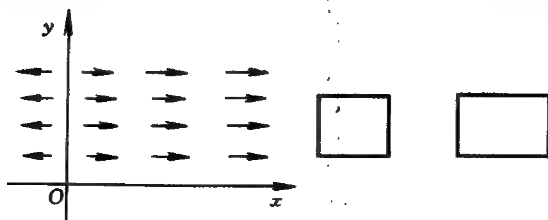


图 1.21 膨胀流动

例 1.13 设

$$u = cx, \quad v = 0, \quad w = 0,$$

则流动如图 1.21,其 $\boldsymbol{S}$ 及 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}c&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

流动有伸长、无角变形、无旋转,它是一种流体膨胀流动. 微元作平移、膨胀.

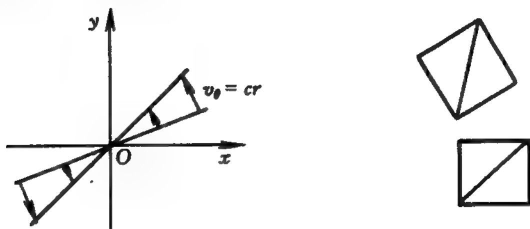


图 1.22 纯旋转

例 1.14 设

$$u=-cy,\quad v=cx,\quad w=0,$$

流动如图 1.22. 其 $\boldsymbol{S}$ 及 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&-c&0\\c&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

即流动无变形、有旋转,它是一种纯旋转(刚体运动$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$). 的流动. 微元作旋转圆周运动. 若流速以柱坐标表示,为

$$v_r=0,v_\theta=cr,v_z=0.$$

这样表示时,其运动会看得更清楚。

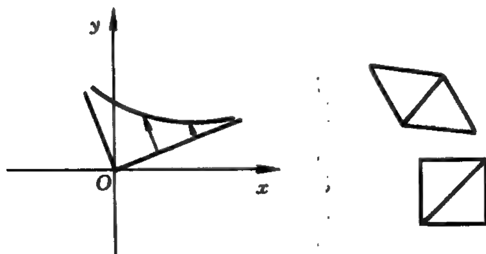


图 1.23 点涡运动

例 1.15 设

$$u=-\frac{cy}{x^2+y^2},\quad v=\frac{cx}{x^2+y^2},\quad w=0,$$

流动图案如图 1.23. 其 $\boldsymbol{S}$ 及 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} -\dfrac{2cxy}{(x^2+y^2)^2} & \dfrac{c(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} & 0 \\ \dfrac{c(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} & \dfrac{2cxy}{(x^2+y^2)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

即流动有伸长、有角变形,但无旋转. 这是一种除原点外处处无旋的流动,常称点涡. 微元作有伸长、剪切的无自转的圆运动. 需要指出的是,这种运动虽然流体质点的迹线为圆,但作圆周运动并不一定就有旋,这与例 1.12 形成鲜明的反照. 本流动若以柱坐标形式表示速度,则有

$$v_r = 0, \quad v_\theta = \frac{c}{r}, \quad w = 0.$$

这时很容易看出其流动特征。

例 1.16 在例 1.12 的速度场中,求变形速度表达式 $\boldsymbol{S}\cdot\delta\boldsymbol{r}$ 中,若 $(\delta x,\delta y,\delta z)=(\delta,\delta,0)$,求此速度在 $(1,1,0)$ 及 $(1,-1,0)$ 方向的分量.

解 由例 1.12 知,变形速度

$$\boldsymbol{S}\cdot\delta\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} 0 & c & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\delta y \\ c\delta x \\ 0 \end{bmatrix}.$$

若 $(\delta x,\delta y,\delta z)=(\delta,\delta,0)$,则此速度为 $(c\delta,c\delta,0)$,其在 $(1,1,0)$ 方向的分量为 $\sqrt{2}c\delta$,在 $(1,-1,0)$ 方向的速度分量为零。

1.5 作用于流体上的力

本节讨论作用于流体上的力及其表达方式.

(一) 质量力与表面力

作用于流体上的外力通常可分为两类,即质量力与表面力.

考虑一体积为 τ,界面为 S 的流体,作用于体积 τ 内每一质量微元(或质点)上的力称为质量力,或称体力,如重力、惯性力等都是质量力. 外界(流体或固体)作用于流体表面 S 上的力称为表面力,也称面力,如大气压强、摩擦力等都是表面力. 质量力与表面力均为分布力,前者分布于体积上. 后者分布于面

积上．一般来说，它们的分布并非是均匀的，它们分别是空间点和表面点与时间的函数。

为了定量地描述质量力，考虑一体积元 $\Delta\tau$，若其中流体密度为 ρ，此体积元的质量为 $\Delta m=\rho\Delta\tau$．设某时刻作用其上的质量力为 $\Delta \boldsymbol{F}$，于是当体积元缩小到一点 M 时，比值 $\Delta \boldsymbol{F}_b/\Delta m$ 的极限值

$$\boldsymbol{F}_b(M,t)=\lim_{\Delta m\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{F}_b}{\Delta m}=\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{F}_b}{\rho\Delta\tau} \tag{1.5.1}$$

就表示某时刻作用于点 M 处单位质量流体上的质量力．如所指出，$\boldsymbol{F}_b$ 一般是空间点及时间的函数．

这样，作用于体积元 $d\tau$ 上的质量力为

$$d\boldsymbol{F}_b=\rho d\tau \boldsymbol{F}_b, \tag{1.5.2}$$

作用于整个流体体积 τ 上的质量力为

$$\int_\tau \rho \boldsymbol{F}_b d\tau. \tag{1.5.3}$$

同样考虑此流体体积 τ 表面 S 上的一面积元 ΔS，取表面 S 的外法向单位矢量为 $\boldsymbol{n}$．设某时刻作用于 ΔS 上的表面力为 $\Delta \boldsymbol{p}$，于是当面积元 ΔS 缩小到一点 M 时，比值 $\Delta \boldsymbol{p}/\Delta S$ 的极限值

$$\boldsymbol{p}_n=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{p}}{\Delta S}, \tag{1.5.4}$$

就表示以 $\boldsymbol{n}$ 为法向的单位面积上的表面力（即应力）．

这样，作用于以 $\boldsymbol{n}$ 为法向的面积元 dS 上的表面力为

$$\boldsymbol{p}_n dS, \tag{1.5.5}$$

而作用于整个表面 S 上的表面力为

$$\int_S \boldsymbol{p}_n dS. \tag{1.5.6}$$

与质量力一样，$\boldsymbol{p}_n$ 也是空间点及时间的函数．但是即使在同一时刻同一空间点，$\boldsymbol{p}_n$ 还与面积的取向有关．如图 1.24 所示，$\boldsymbol{p}_n$ 实际上是某一时刻在 M 点以 $\boldsymbol{n}$ 为其法向的 ΔS 面，在 $\boldsymbol{n}$ 所指一侧的流体对于 ΔS 的另一侧流体的作用力．显然，通过 M 点可作无数个不同法向的面，在这些面上都有各自的表面力 $\boldsymbol{p}_n$ 的作用，而这些 $\boldsymbol{p}_n$ 是各不相同的．因此，应力 $\boldsymbol{p}_n$ 还是其作用处的面元的法向 $\boldsymbol{n}$ 的函数．$\boldsymbol{p}_n$ 这一符号的下标 $\boldsymbol{n}$ 即表达了这个意思．这样，我们可以写 $\boldsymbol{p}_n=\boldsymbol{p}_n(M,t,\boldsymbol{n})$．

还有两点需要特别指出，一是，一般来说，应力 $\boldsymbol{p}_n$ 的方向并不与法向 $\boldsymbol{n}$ 一致．$\boldsymbol{p}_n$ 除了有其 $\boldsymbol{n}$ 向分量（法向分量）p_{nn} 外，还有面元上的切向分量 $p_{n\tau}$（图 1.24）．只有当 $p_{n\tau}=0$ 时，$\boldsymbol{p}_n$ 才与 $\boldsymbol{n}$ 向一致．二是，如图 1.24，在 M 点，设面积

元 ΔS 有法向 $\boldsymbol{n}$，ΔS 右侧流体通过 ΔS 有表面力 $\boldsymbol{p}_n \Delta S$，作用于 ΔS 左侧的流体，同时，ΔS 左侧的流体也通过 ΔS 有表面力 $\boldsymbol{p}_{-n} \Delta S$，作用于 ΔS 右侧的流体，于是，根据作用力与反作用力的关系有

$$\boldsymbol{p}_{-n} \Delta S = -\boldsymbol{p}_n \Delta S,$$

或

$$\boldsymbol{p}_{-n} = -\boldsymbol{p}_n。\tag{1.5.7}$$

这一公式在下面是有用的.

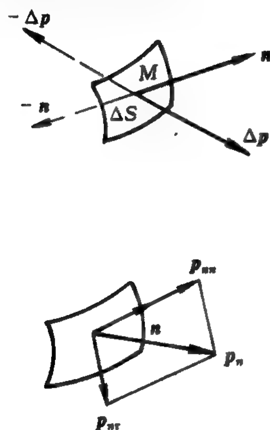


图 1.24 应力 $\boldsymbol{p}_n$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的关系

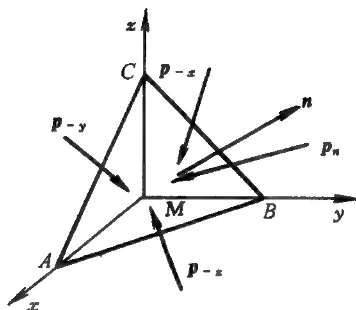


图 1.25 四面体的应力

（二）流体中任一点的应力、应力张量

下面将推导应力 $\boldsymbol{p}_n$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的关系，并引出应力张量。

为研究一点处面积元上的表面力，先在流体中以 M 为顶点作一微四面体（图 1.25）. 设 $MA=\Delta x$，$MB=\Delta y$，$MC=\Delta z$，$\triangle ABC$ 的法向单位矢量为 $\boldsymbol{n}$：

$$\boldsymbol{n} = \cos(n,x)\boldsymbol{i} + \cos(n,y)\boldsymbol{j} + \cos(n,z)\boldsymbol{k}$$

或简写为

$$\boldsymbol{n} = n_x\boldsymbol{i} + n_y\boldsymbol{j} + n_z\boldsymbol{k}.\tag{1.5.8}$$

设 $\triangle ABC$ 的面积为 ΔS，于是 $\triangle MBC$、$\triangle MCA$、$\triangle MAB$ 的面积可分别以 ΔS_x、ΔS_y、ΔS_z 表示为

$$\begin{aligned}\Delta S_x &= \Delta S n_x,\\ \Delta S_y &= \Delta S n_y,\\ \Delta S_z &= \Delta S n_z,\end{aligned}\tag{1.5.9}$$

又 $MABC$ 四面体体积为

$$\Delta\tau = \frac{1}{3}\Delta S h$$

其中 h 为 M 点到 $\triangle ABC$ 的距离. 如果四面体相似地缩小为一点,则 h 为一阶小量,ΔS 为二阶小量,$\Delta\tau$ 为三阶小量.

现考虑四面体 $MABC$ 的受力状况. 作用于此四面体的外力有质量力、表面力及惯性力. 根据达朗贝尔原理,这三种力及其力矩应当平衡. 由于作用于四面体的质量力及惯性力与此四面体的质量从而与此四面体的体积 $\Delta\tau$ 成正比,故其为三阶小量,而作用于此四面体的表面力与四面体的表面积成正比,故其为二阶小量. 当此四面体缩小至一点时,忽略三阶小量,则其表面力的合力(及其力矩)将等于零. 设作用于 $\triangle MBC$、$\triangle MCA$、$\triangle MAB$ 及 $\triangle ABC$ 各面上的表面力分别用 $\boldsymbol{p}_{-x}\Delta S_x$、$\boldsymbol{p}_{-y}\Delta S_y$、$\boldsymbol{p}_{-z}\Delta S_z$ 及 $\boldsymbol{p}_n\Delta S$ 表示,则有

$$\boldsymbol{p}_{-x}\Delta S_x + \boldsymbol{p}_{-y}\Delta S_y + \boldsymbol{p}_{-z}\Delta S_z + \boldsymbol{p}_n\Delta S = 0.$$

利用(1.5.7)式及(1.5.9)式得

$$\boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{p}_x n_x + \boldsymbol{p}_y n_y + \boldsymbol{p}_z n_z. \tag{1.5.10}$$

上式在直角坐标系中的投影是

$$\begin{aligned} p_{nx} &= n_x p_{xx} + n_y p_{yx} + n_z p_{zx}, \\ p_{ny} &= n_x p_{xy} + n_y p_{yy} + n_z p_{zy}, \\ p_{nz} &= n_x p_{xz} + n_y p_{yz} + n_z p_{zz}. \end{aligned} \tag{1.5.11}$$

或将 x,y,z 分别以 1,2,3 替代,上式可写为

$$p_{nj} = n_i p_{ij}, \qquad i,j = 1,2,3.$$

上式(1.5.11)也可用矩阵形式表示:

$$[p_{nx}\ p_{ny}\ p_{nz}] = [n_x \quad n_y \quad n_z]\begin{bmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{bmatrix} \tag{1.5.12}$$

现将上式写为

$$\boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{P},$$

其中

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{bmatrix}$$

称为应力张量. p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} 为法向应力分量,其余六个 $p_{xy}, p_{yx}, p_{yz}, p_{zy}, p_{zx}, p_{xz}$ 为切向应力分量(图 1.26). 注意,在上述表示式中,应力张量各分量的两个下标中,第一个下标(见(1.5.11)式)表示该应力作用面的法线方向;第二个下标表示该应力的投影方向,例如 p_{xy} 表示,它是作用于外法向为 x 轴正向的面积元上的应力 $\boldsymbol{p}_x$ 在 y 轴上的投影分量.

正如式(1.5.10)见到的,该式表达了表面力 $\boldsymbol{p}_n$ 与表面外法向单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 的

关系，而(1.5.12)式除了表达 $\boldsymbol{p}_n$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的关系外，还引入了一个应力张量，且应力张量$[P]$不再与 $\boldsymbol{n}$ 有关，并只与空间点位置与时间有关. 由九个分量组成的这个应力张量完全表达了给定点 M 及给定时刻的应力状态. 一旦该时刻在该处的面积元从而其外法向单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 确定后，则该面积元上的应力 $\boldsymbol{p}_n$ 就随之而定：$\boldsymbol{p}_n=\boldsymbol{n}\cdot[P(M,t)]$. $[P(M,t)]$不再与 $\boldsymbol{n}$ 有关，它只是空间点 M 及时间 t 有关。

自然，应力张量各分量 p_{xx}，p_{xy}等与坐标系的选择有关，但正如矢量的分量也与坐标系的选取有关，矢量本身与坐标系的选取无关一样，应力张量也不依赖于坐标系的选取，它们只是时间及空间点的函数.

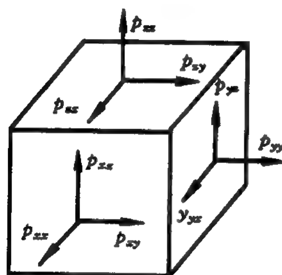


图 1.26 应力张量各分量

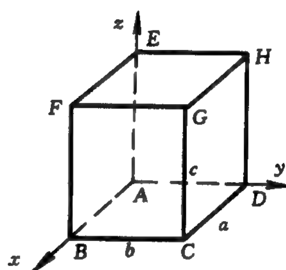


图 1.27

例 1.17 设流体中的应力张量由下式给出，

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}-p+\rho gz & 0 & 0\\ 0 & -p+\rho gz & 0\\ 0 & 0 & -p+\rho gz\end{bmatrix},$$

其中 p,ρ,g 为常数，即给出各空间点上的应力分量只是法向分量，且是一种静压力。若图 1.27 中 $ABCDEFGH$ 为一长方形流体，求

(1) 长方体六个面上的应力分布；

(2) 求作用于 $z=0$ 及 $x=0$ 面上的合力.

解 (1)利用公式(1.5.12)可求出各面上的应力，注意各个面的单位法向量的表达。

在 $ADHE$ 面，

$$\boldsymbol{n}=(-1,0,0),\boldsymbol{p}_{-x}=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P}=(p-\rho gz,0,0),$$

在 $BCGF$ 面，

$$\boldsymbol{n}=(1,0,0),\boldsymbol{p}_{x}=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P}=(-p+\rho gz,0,0),$$

在 $BAEF$ 面，

$$\boldsymbol{n}=(0,-1,0),\boldsymbol{p}_{-y}=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P}=(0,p-\rho gz,0),$$

在 $CDHG$ 面，

$$\boldsymbol{n} = (0,1,0), \boldsymbol{p}_y = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{P} = (0, -p + \rho g z, 0),$$

在 $BCDA$ 面，该面 $z=0$，

$$\boldsymbol{n} = (0,0,-1), \boldsymbol{p}_{-z} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{P} = (0,0,p),$$

在 $FGHE$ 面，该面 $z=c$，

$$\boldsymbol{n} = (0,0,1), \boldsymbol{p}_z = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{P} = (0,0,-p + \rho g c),$$

(2) 在 $z=0$ 面上，

$$\boldsymbol{F}_{z=0} = \int \boldsymbol{p}_{-z} \mathrm{d}A = pab\boldsymbol{e}_3.$$

在 $x=0$ 面上，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_{x=0} &= \int \boldsymbol{p}_{-x} \mathrm{d}A = \int (p - \rho g z)\boldsymbol{e}_1 \mathrm{d}A \\ &= \left(pbc - \rho g \int_0^c z b \mathrm{d}z\right)\boldsymbol{e}_1 \\ &= \left(pbc - \frac{\rho}{2} g b c^2\right)\boldsymbol{e}_1.\end{aligned}$$

例 1.18 流体内某处的应力张量的分量可以表示成矩阵

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

试问作用于平面 $x+3y+z=1$ 外侧(离开原点的一侧)上的应力矢量是什么？这个平面上应力向量的法向和切向分量是什么？

解 对平面 $x+3y+z=1$ 外侧的法向单位矢量为

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{1+3^2+1}}(\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) = \frac{1}{\sqrt{11}}(\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}),$$

故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{P} &= \frac{1}{\sqrt{11}}[1 \quad 3 \quad 1]\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{11}}[5 \quad 7 \quad 3].\end{aligned}$$

该应力矢量在平面 $x+3y+z=1$ 的法向上的分量为

$$p_{nn} = \boldsymbol{p}_n \cdot \boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{11}}[5 \quad 7 \quad 3]\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{3}{\sqrt{11}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} \end{bmatrix} = \frac{1}{11}(5+21+3) = \frac{29}{11}.$$

又设应力矢量 $\boldsymbol{p}_n$ 的切向分量为 $p_{n\tau}$，则

$$|\boldsymbol{p}_n| = \sqrt{p_{nn}^2 + p_{n\tau}^2},$$

故

$$p_{n\tau} = \sqrt{|\boldsymbol{p}_n|^2 - p_{n\tau}^2} = \sqrt{\frac{83}{11} - \left(\frac{29}{11}\right)^2} = \frac{6\sqrt{2}}{11}.$$

（三）应力张量的对称性

可以证明，应力张量是对称的，即应力张量的分量

$$p_{ij} = p_{ji}.$$

由前，作用于四面体 $MABC$ 上的表面力的合力矩等于零。设各面上的力对 M 点取矩，由于分别作用于面 MBC、MCA、MAB 及 ABC 上的面力 $\boldsymbol{p}_{-x}$、$\boldsymbol{p}_{-y}$、$\boldsymbol{p}_{-z}$、$\boldsymbol{p}_n$ 被认为是均匀分布的．其作用点应取在各表面的重心 G_1、G_2、G_3 及 G 处(图 1.28)．而 G_1、G_2、G_3 又分别是 G 点在三个坐标面的投影。设 $\overrightarrow{MG_1} = \boldsymbol{r}_1$，$\overrightarrow{MG_2} = \boldsymbol{r}_2$，$\overrightarrow{MG_3} = \boldsymbol{r}_3$，$\overrightarrow{MG} = \boldsymbol{r}$．

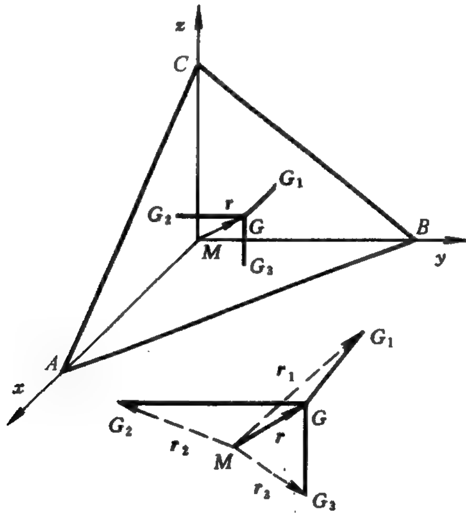


图 1.28 应力及作用点

则由合力矩为零应有

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}_n \Delta S + \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{p}_{-x} \Delta S_x + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{p}_{-y} \Delta S_y + \boldsymbol{r}_3 \times \boldsymbol{p}_{-z} \Delta S_z = 0,$$

利用式(1.5.7)及(1.5.9)得

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{p}_x n_x + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{p}_y n_y + \boldsymbol{r}_3 \times \boldsymbol{p}_z n_z. \tag{1.5.13}$$

又由式(1.5.10)有

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}_x n_x + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}_y n_y + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}_z n_z. \tag{1.5.14}$$

上两式相减有

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)\times\boldsymbol{p}_x n_x+(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2)\times\boldsymbol{p}_y n_y+(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_3)\times\boldsymbol{p}_z n_z=\boldsymbol{0}. \tag{1.5.15}$$

因

$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1=x\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2=y\boldsymbol{j}\quad \boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_3=z\boldsymbol{k}, \tag{1.5.16}$$

其中 x,y,z 为 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{MG}$ 的分量，将(1.5.16)式代入(1.5.15)式得

$$xn_x\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{p}_x+yn_y\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{p}_y+zn_z\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{p}_z=0. \tag{1.5.17}$$

又因平面 $G_1G_2G_3$ 与平面 ABC 平行，所以 $\boldsymbol{n}$ 也是 $G_1G_2G_3$ 平面的法线. 另由图 1.28 还有

$$x\boldsymbol{i}-y\boldsymbol{j}=\overrightarrow{G_1G_2},\quad y\boldsymbol{j}-z\boldsymbol{k}=\overrightarrow{G_2G_3},\quad z\boldsymbol{k}-x\boldsymbol{i}=\overrightarrow{G_3G_1}.$$

利用上式及(1.5.16)式得

$$\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}_3\cdot\boldsymbol{n} \tag{1.5.18}$$

或

$$yn_y+zn_z=zn_z+xn_x=xn_x+yn_y$$

或

$$xn_x=yn_y=zn_z, \tag{1.5.19}$$

从而式(1.5.17)变为

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{p}_x+\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{p}_y+\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{p}_z=0$$

或

$$\boldsymbol{i}\times(p_{xx}\boldsymbol{i}+p_{xy}\boldsymbol{j}+p_{xz}\boldsymbol{k})+\boldsymbol{j}\times(p_{yx}\boldsymbol{i}+p_{yy}\boldsymbol{j}+p_{yz}\boldsymbol{k})$$
$$+\boldsymbol{k}\times(p_{zx}\boldsymbol{i}+p_{zy}\boldsymbol{j}+p_{zz}\boldsymbol{k})=0$$

或

$$\boldsymbol{k}(p_{xy}-p_{yx})+\boldsymbol{j}(p_{zx}-p_{xz})+\boldsymbol{i}(p_{yz}-p_{zy})=0.$$

最后得

$$p_{xy}=p_{yx},\quad p_{zx}=p_{xz},\quad p_{yz}=p_{zy}, \tag{1.5.20}$$

这就证明了，应力张量是对称的：即 $p_{ij}=p_{ji}$. 它的九个分量，只有六个是独立的.

（四）静止流体与无粘性流体的应力张量

1. 静止流体的应力张量

1.1 节已经指出，静止流体是不能承受切向力的，(否则就将不停地运动)，故对静止流体必有切向力为零. 由(1.5.11)式及 $\boldsymbol{p}_n$ 得

$$\begin{cases}p_{nx}=n_xp_{xx},\\ p_{ny}=n_yp_{yy},\\ p_{nz}=n_zp_{zz},\end{cases} \tag{1.5.21}$$

$$\boldsymbol{p}_n=p_{nn}\boldsymbol{n}. \tag{1.5.22}$$

(1.5.22)式写成分量形式即

$$\begin{cases} p_{nx} = p_{nn}n_x, \\ p_{ny} = p_{nn}n_y, \\ p_{nz} = p_{nn}n_z. \end{cases} \tag{1.5.23}$$

比较(1.5.23)及(1.5.21)得

$$p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = p_{nn}. \tag{1.5.24}$$

现令 $p_{nn} = -p$,其中负号表示在表面力 $\boldsymbol{p}_n = p_{nn}\boldsymbol{n} = -p\boldsymbol{n}$ 作用下,流体受压($-\boldsymbol{n}$ 向),故 p 称压强. 这样,应力张量

$$\boldsymbol{P} = -p\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = -p\boldsymbol{I}, \tag{1.5.25}$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 为三阶单位矩阵,或二阶单位张量. 上式也可写为

$$p_{ij} = -p\delta_{ij},$$

其中 δ_{ij} 为

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j, \\ 0, i \neq j. \end{cases}$$

2. 无粘性流体的应力张量

1.1 节也已指出,实际流体都是有粘性的,但若粘度系数或流场中速度梯度很小以致流体的粘性(切向)应力很小时,可以近似地把粘性应力取为零,这种虚构的流体,通常称为无粘性流体. 由于无粘性流体 $p_{n\tau} = 0$,故上述静止流体的结论同样成立,即

$$\boldsymbol{p}_n = -p\boldsymbol{n}$$

和

$$\boldsymbol{P} = -p\boldsymbol{I},$$

或

$$p_{ij} = -p\delta_{ij}.$$

1.6 应力张量与应变率张量之间的关系——本构方程

广义地讲,反映物质物理性质之间的关系式,统称为本构方程. 在流体力学中,本构方程一般专指应力张量与应变率张量之间的关系,相当于固体力学中应力张量与应变张量之间的关系,即广义虎克定律.

1.1 节已指出,牛顿对最简单的流体运动得出实验定律:两层流体间的切向应力与其速度梯度成正比:

$$\tau = \mu\frac{\partial u}{\partial y}, \tag{1.6.1}$$

其中 μ 为粘度系数．这是最简单的应力张量分量 p_{xy} 与应变率张量分量$\partial u/\partial y$ 之间的关系。要得到一般形式的应力张量 $\boldsymbol{P}$ 与应变率张量 $\boldsymbol{S}$ 之间的关系，必须采用理论推演方法．1848 年，斯托克斯首先研究这一问题，他假设

(1) 应力张量是应变率张量的线性函数；

(2) 流体是各向同性的，也就是说流体的性质与方向无关；

(3) 当流体静止时，应变率为零，流体中的应力就是流体的静压强．

由假设(1)，应力张量可写为

$$\boldsymbol{P} = a\boldsymbol{S} + b\boldsymbol{I} \tag{1.6.2}$$

其中 $\boldsymbol{S}$ 由式(1.4.3)表示，$\boldsymbol{I}$ 为二阶单位张量，a 及 b 为标量常量．

依式(1.6.1)，可写为

$$p_{12} = \mu\frac{\partial u}{\partial y} = 2\mu S_{12}, \tag{1.6.3}$$

于是，比较(1.6.2)式与(1.6.3)式，需有

$$a = 2\mu. \tag{1.6.4}$$

又由(1.6.2)式

$$p_{11} = 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} + b,$$

$$p_{22} = 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} + b,$$

$$p_{33} = 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} + b.$$

将以上三式相加，得

$$\begin{aligned} p_{11} + p_{22} + p_{33} &= 2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 3b \\ &= 2\mu\nabla\cdot\boldsymbol{v} + 3b, \end{aligned}$$

因而

$$b = \frac{1}{3}(p_{11} + p_{22} + p_{33}) - \frac{2\mu}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}. \tag{1.6.5}$$

将上式代入(1.6.2)式

$$\boldsymbol{P} = 2\mu\boldsymbol{S} + \left\{\frac{1}{3}(p_{11} + p_{22} + p_{33}) - \frac{2\mu}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right\}\boldsymbol{I} \tag{1.6.6}$$

考虑到假设(3)，有

$$\boldsymbol{P} = -p\boldsymbol{I} \tag{1.6.7}$$

比较(1.6.6)及(1.6.7)式，可见$\frac{1}{3}(p_{11} + p_{22} + p_{33})$应包含 $-p$ 这一项，而且由于 $p_{11} + p_{22} + p_{33}$是应力张量的一个不变量，根据各向同性的假设，它也应与应变率张量的不变量 $s_{11} + s_{22} + s_{33} = \mathrm{div}\,\boldsymbol{v}$ 有关，故有

$$\frac{1}{3}(p_{11}+p_{22}+p_{33})=-p+\mu'\operatorname{div}\boldsymbol{v}, \tag{1.6.8}$$

其中 μ' 为一系数.

将(1.6.8)式代入(1.6.6)式,得

$$\boldsymbol{P}=2\mu\boldsymbol{S}+\{-p+(\mu'-\frac{2}{3}\mu)\operatorname{div}\boldsymbol{v}\}\boldsymbol{I}. \tag{1.6.9}$$

若取

$$\mu'-\frac{2}{3}\mu=\lambda,$$

则上式为

$$\boldsymbol{P}=2\mu\boldsymbol{S}+\{-p+\lambda\operatorname{div}\boldsymbol{v}\}\boldsymbol{I}. \tag{1.6.10}$$

写成分量形式是

$$\begin{aligned}
p_{11}&=-p+2\mu\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\lambda\operatorname{div}\boldsymbol{v},\\
p_{22}&=-p+2\mu\frac{\partial v_2}{\partial x_2}+\lambda\operatorname{div}\boldsymbol{v},\\
p_{33}&=-p+2\mu\frac{\partial v_3}{\partial x_3}+\lambda\operatorname{div}\boldsymbol{v},\\
p_{12}&=p_{21}=\mu\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}+\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right),\\
p_{23}&=p_{32}=\mu\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3}+\frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right),\\
p_{31}&=p_{13}=\mu\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right).
\end{aligned}$$

这就是广义牛顿应力公式.

广义牛顿应力公式与无粘性流体应力公式

$$\boldsymbol{P}=-p\boldsymbol{I}$$

相比较,粘性对运动流体产生了切向力,还使法应力有了改变. 而且一般来说,在三个正交面上的法应力并不相等,即 p_{11},p_{22},p_{33} 各异。

为了了解 λ 的意义,现定义一个力学压强 p_m:

$$p_m=-\frac{1}{3}(p_{11}+p_{22}+p_{33}) \tag{1.6.11}$$

于是由式(1.6.8)

$$p_m=p-\mu'\operatorname{div}\boldsymbol{v}=p-\left(\lambda+\frac{2\mu}{3}\right)\operatorname{div}\boldsymbol{v}.$$

这样,对静止流体或无粘性流体,有

$$p_m=p=-p_{11}=-p_{22}=-p_{33}.$$

这里 p 即为热力学"压强". 对不可压缩流体,因 $\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0$,

$$p_m = p$$

即力学压强等于热力学压强. 且在应力张量的表达式(1.6.10)中,λ 并不出现.

对可压缩流体,div $\boldsymbol{v} \neq 0$,流体会发生膨胀或压缩,这时力学压强不等于热力学压强. 且 λ 出现在应力张量与 div $\boldsymbol{v}$ 有关的项中.

由此可见,λ 可称为体膨胀粘度系数,有时也称第二粘度系数. 体膨胀粘度的微观机理与体积变化时的能量耗散机制有关.

由于对大多数流体 div $\boldsymbol{v}$ 并不很大,斯托克斯曾假设

$$\mu' = \lambda + \frac{2\mu}{3} = 0,$$

或

$$\lambda = -\frac{2\mu}{3}, \tag{1.6.12}$$

这样便对所有流体有

$$\boldsymbol{P} = 2\mu\boldsymbol{S} + \{-p + \lambda \text{div}\, \boldsymbol{v}\}\boldsymbol{I}. \tag{1.6.13}$$

或

$$p_{11} = -p + 2\mu\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \lambda \text{div}\, \boldsymbol{v},$$

$$p_{22} = -p + 2\mu\frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \lambda \text{div}\, \boldsymbol{v},$$

$$p_{33} = -p + 2\mu\frac{\partial v_3}{\partial x_3} + \lambda \text{div}\, \boldsymbol{v},$$

$$p_{12} = p_{21} = \mu\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right),$$

$$p_{23} = p_{32} = \mu\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right),$$

$$p_{31} = p_{13} = \mu\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right),$$

这样,在应力张量的各分量中就只出现一个粘度系数 μ,对一般的粘性流体运动,本构方程就采用式(1.6.13),但如果流体的体膨胀率很大,这时 λ 就要保留在广义牛顿应力公式中.

综上所述,应力张量与应变率张量之间的关系,即本构方程,是在牛顿粘性定律的基础上,引入了斯托克斯的三个假设,得出了广义牛顿定律(1.6.10)或(1.6.13). 此定律对多数流体是适用的. 在一般工程问题范围内也是正确的. 我们把满足广义牛顿定律的流体,统称为牛顿流体. 否则就称非牛顿流体.

小 结

流体包括气体和液体. 流体的特点是易流动性. 流体的宏观特性包括压缩

性、粘性、导热性、扩散性及表面张力性质等. 它们对流体的运动都有影响. 流体的这些宏观性质可用微观理论来解释.

连续介质假设是对流体的最基本的假设,如同质点、刚体一样,连续介质是一种宏观的物质模型;

流体力学物理量有两种描述方法,着眼于质点的是拉格朗日方法,着眼于空间点的是欧拉方法;

物理量的随体导数是跟随流体运动时流体物理量的时间变化率;

迹线、流线、时间线及脉线是对流体运动的几何描述;

流体运动在一个局部微元范围内可认为是平动、旋转及变形所组成. 流体的变形用应变率张量描述;作用于流体上的力有质量力及表面力,表面力不仅是空间点及时间的函数,还与表面所取方向有关. 应力张量完全描述了一点的应力状态,它是对称的;

本构方程反映了应力张量与应变率张量之间的关系.

*实验中的发现

(一) 流体的可压缩性

1657 年 K. 肖特(1608—1666)在他的《液体与气体动力学》一书中介绍了 O. von. 格里凯(1602—1686)发明的抽气泵和它的应用情况,这些信息引起了 R. 波义耳(1627—1691)的极大兴趣,并激励着他去设计和制造同样的装置和利用它进行了大量有关大气压强与稀薄空气的实验.

在利用抽气泵进行实验的过程中,波义耳领悟到空气具有"弹性",并试图用实验来证明这一点。于是他用一只羊的膀胱. 充入部分空气后,将细颈处牢牢扎紧,放入抽气泵的容器中,随着容器内的空气减少,膀胱逐渐膨胀起来。当空气重新进入容器时,膀胱又逐渐恢复原状,这表明封闭在膀胱中的空气是有"弹性"的. 为了充分说明这一事实,他还做了其它许多实验,例如将膀胱中的空气全部抽光并将细颈处扎紧,或将膀胱中充入少量空气,但不将细颈处扎紧,重做实验,均未见有上述现象出现. 又如将膀胱充入适量空气,扎紧细颈处,放入容器中,当容器被抽空至一定程度时,膀胱就会发生爆裂等。

1660 年波义耳将这些结果发表在他的《关于空气弹性的新物理 - 力学实验》一书中,他的朋友 R. 托康利阅读此书后提出一个假说,即被密封空气的体积与压强互成反比,为了证明这一假说,波义耳于 1661 年 9 月 11 日又进了下述实验.

用一支 U 形管,使其两肢的长度有较大差距,封闭短肢的一端,让长肢的一

端敞开，两肢上均贴有画上刻度的纸条，刻度为每英寸一格，每格又分为八等份，并使刻度的起点位于同一水平面上，然后，从长肢开口端注入水银，直至两肢中的水银面正好达到刻度的起点，这时短肢上方为空气，记下其体积，继续从长肢开口端注入水银，使水银对短肢中的空气增加压强，于是空气的密度增加，体积减小，如此继续不断注入水银，直至短肢中的空气体积减少至原体积的一半时，长肢中的水银面约较短肢中的高 29 英寸，这就证实了假说的正确性。也表明了加在长肢中的水银柱越高，空气的抵抗力与(恢复)膨胀力也越大，正如 E. 托里拆里(1608—1647)所说的，对同样体积的空气，当密度增加至原来的二倍时，其弹力也将增至原来的二倍. 波义耳继续注入水银，直至短肢中的空气受压过大，以致玻璃破裂。他又改用一支形状相同，但长肢很长的 U 形管来继续进行实验，由于肢管太长无法在室内安装，他就把它靠挂在屋外的墙壁上，一人站在梯子上灌注水银和观察长肢中的水银面高度，另一人留在地面观察空气体积和指导灌注水银。实验范围是 1－4 个大气压，这样就取得了大量数据，他把实验结果与根据假说的计算结果进行比较，获得相当好的一致.

他还对低于一个大气压的情况也进行了实验，他用一根两端开口的长玻璃管，上面贴有与上述相同的刻度纸条，开始时把管子插入水银中，只留一格露在外面，然后用石蜡把这一格充满堵死，待管子冷却后，逐渐把它从水银中提起来，同时，在每一位置处，记下水银柱与空气柱的高度，直到空气柱的高度膨胀至 32 英寸为止，最后将这些实验值和假说值作比较发现惊人的一致. 在这些实验的基础上，1662 年波义耳提出了后人以他的名字命名的气体定律. 它的函义是在恒定的温度下，气体的压强与其体积的乘积为一常数。

波义耳也曾指出，当他知道托康利的假说以后，曾把此事告诉他的朋友 R. 胡克(1638—1703)，胡克说 1660 年他也做过稀薄空气的实验，结果与假说相一致. 1665 年胡克在他的《显微术》一书中发表了对这些实验的说明，结论是他所做的实验，或是在波义耳告诉他托康利的假说以后他重复做的实验均表明“空气的弹力和它的膨胀成反比，或者至少非常接近于反比”. 可见，胡克与托康利对波义耳定律的贡献也是很大的。

波义耳在实验过程中还发现，一定体积的封闭空气加热以后会使压强增高，但他未作进一步的研究. 直到 1802 年 J. L. G. 吕萨克(1778—1850)继 H. B. 德·索热尔(1740—1799)，J. 普里斯特利(1733—1804)和 L. B. B. G. de·莫尔瓦(1737－1816)等人的实验研究之后，才成功地将波义耳定律扩充为包括温度的情况，即现称的完全气体定律或状态方程.

至于液体的压缩性问题，1761 年 J. 坎顿(1718－1772)，1819 年珀金斯，1823 年 H. C. 奥斯特(1777—1851)，1829 年 J. D. 卡拉顿(1802—1892)和 J. C. F. 斯特姆(1803—1855)等人均进行过实验研究. 他们的共同结论是：在常

温常压下，一般液体的压缩性都非常小，但在高温高压下，特别是高压下也可能达到很可观的程度.

习　　题

1.1　流体的运动用

$$x=a,\quad y=e^{t}\frac{b+c}{2}+e^{-t}\frac{b-c}{2},\quad z=e^{t}\frac{b+c}{2}-e^{-t}\frac{b-c}{2},$$

表示，求速度的拉格朗日描述与欧拉描述.

1.2　一速度场用

$$u=\frac{x}{1+t},\qquad v=\frac{2y}{1+t},\qquad w=\frac{3z}{1+t},$$

描述，

(1) 求其加速度的欧拉描述；

(2) 先求矢径表示式 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(a,b,c,t)$，再由此求加速度的拉格朗日描述；

(3) 求流线及迹线.

1.3　速度场由

$$\boldsymbol{v}=(x^2t,yt^2,xz)$$

给出，当 $t=1$ 时求质点 $P(1,3,2)$ 的速度及加速度.

1.4　速度场由

$$\boldsymbol{v}=(\alpha x+t^2,\beta y-t^2,0)$$

给出，求速度及加速度的拉格朗日表示.

1.5　已知质点的位置表示如下：

$$x=a,\quad y=b+a(e^{-2t}-1),\quad z=c+a(e^{-3t}-1)$$

求：(1) 速度的欧拉表示；

(2) 加速度的欧拉表示及拉格朗日表示，并分别求 $(x,y,z)=(1,0,0)$ 及 $(a,b,c)=(1,0,0)$ 的值；

(3) 过点 $(1,1,1)$ 的流线及 $t=0$ 时在 $(a,b,c)=(1,1,1)$ 这一质点的迹线；

(4) 散度、旋度及涡线；

(5) 应变率张量及旋转张量.

1.6　设速度场为

$$u=-ky,\quad v=k(x-at),\quad w=0,$$

其中 k 与 a 为常数，求

(1) t 时刻的流线方程及 $t=0$ 时在 (a,b,c) 处的流体质点的迹线；

(2) 速度的拉格朗日表示式；

(3) 加速度的拉格朗日表示式；

(4) 求散度、旋度及涡线；

(5) 应变率张量及旋转张量.

*1.7　设 $u=x+3y, v=-x-y, w=0$,求速度的拉格朗日描述及欧拉加速度表示。

1.8　已知拉格朗日描述为

$$x = ae^{-2t/k}$$
$$y = be^{t/k}$$
$$z = ce^{t/k}$$

(1) 问运动是否定常,是否不可压流体,是否无旋流场

(2) 求 $t=1$ 时在(1,1,1)点的加速度。

(3) 求过点(1,1,1)的流线。

1.9　已知 $u=x+1, v=x, w=0$,求

(1) 速度的拉格朗日描述;

(2) 质点加速度;

(3) 散度及旋度;运动是否有旋;流体是否不可压;

(4) 迹线及流线.

1.10　已知　$u=yt$, $v=xt$, $w=0$,求

(1) 加速度场及 $t=1$ 时在 $x=1, y=1$ 处的值;

(2) 迹线及流线及经(0,1,0)处的流线和 $t=1$ 时在(1,0,0)处的迹线;

(3) 散度及旋度;

(4) 速度的拉格朗日描述;

1.11　已知 $u=(a-1)e^t+1$, $v=1-(b+1)e^{-t}$, $w=0$,求

(1) 加速度场及 $t=1$ 时在 $x=1, y=1$ 处的值;

(2) 迹线及流线及经(0,1,0)处的流线和 $t=1$ 时在(1,0,0)处的迹线;

(3) 散度及旋度。

*1.12　试写出在柱坐标和球坐标系中用欧拉描述法表示的流线及迹线的微分方程.

1.13　求速度场

$$u = \frac{cx}{x^2+y^2},\ v = \frac{cy}{x^2+y^2},\ w = 0$$

的柱坐标形式,由此写出迹线及流线方程. 式中 c 为常数.

1.14　给出速度场为

$$u = -\frac{cy}{x^2+y^2},\ v = \frac{cx}{x^2+y^2},\ w = 0,$$

试重复上题.

*1.15　已知

$$v_r = U\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta,\quad v_\theta = -U\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta,\quad v_z = 0,$$

画出迹线及流线.

1.16　已知一速度场为.

$$u = 4z-3y, v = 3x, w = -4x,$$

试问此流体是否为刚体运动,证明

$$v = \frac{1}{2}\mathrm{rot}\, v \times r.$$

*1.17　对速度场

$$u = 3x^2y,\ v = 2y^2z,\ w = xyz^2,$$

求在点 $M(1,1,1)$沿单位矢量

$$s^0 = \frac{1}{5}(3,0,-4)$$

方向的伸长速率及两正交方向

$$s^0 = \frac{1}{5}(3,0,-4) \quad 及 \quad s^1 = \frac{1}{5}(4,0,3)$$

之间的剪切速率。

1.18　设

$$u = v = 0,\ w = b(a^2 - x^2 - y^2),$$

求应变率张量及旋转张量.

*1.19　当应变率张量各分量均为常数时,证明,在平面上或在直线上的质点,于变形后仍在相应的某一平面或直线上.

1.20　已知密度场为 $\rho = x + y\sin t$ 且

$$x = a + t,\quad y = b + t^2,\quad z = 0,$$

求密度的拉格朗日描述及其随体导数.

1.21　若

$$x = ae^t,\quad y = be^{-t},$$

用拉格朗日描述及欧拉描述两种方法证明,密度 $\rho = xy$ 是不可压缩流体运动的密度.

1.22　在 P 点的应力张量由如下给出

$$P = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

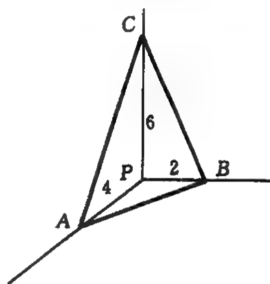
求 (1) P 点与单位法向矢量

$$n = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

垂直的平面上的应力矢量 p_n;

(2) 垂直于该平面的应力矢量分量;

(3) n 与 p_n 之间的夹角.



1.22 题图

1.23　已知 P 点的应力张量 P

$$P = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

求图示 P 点平行于 ABC 平面上的应力矢量。

1.24　应力张量由

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}3xy & 5y^2 & 0\\ 5y^2 & 0 & 2z\\ 0 & 2z & 0\end{bmatrix}$$

给出，求作用于平面上 M 点$(2,1,\sqrt{3})$的应力矢量，该平面在 M 点与圆柱面 $y^2+z^2=4$ 相切.

1.25　若应力状态由上题给出，并认为流体在质量力及表面力作用下处于平衡状态：$-\rho\boldsymbol{F}=\nabla\cdot\boldsymbol{P}$，即

$$\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{xz}}{\partial z}+\rho F_x=0,$$

$$\frac{\partial p_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{yz}}{\partial z}+\rho F_y=0,$$

$$\frac{\partial p_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zz}}{\partial z}+\rho F_z=0,$$

试问体力应为何形式.

1.26　利用高斯定理证明，当 a 为常数时，

$$\oint_s a\boldsymbol{n}\mathrm{d}A=0.$$

*1.27　求柱坐标及球坐标系中的广义牛顿公式.

1.28　设两同轴圆管间的环状流动的速度分布为

$$v_\theta=\frac{1}{r_2^2-r_1^2}\left[r(\omega_2r_2^2-\omega_1r_1^2)-\frac{r_2^2r_1^2}{r}(\omega_2-\omega_1)\right],$$

其中 r_1、r_2 及 ω_1,ω_2 分别是内外圆柱半径及内外圆柱的旋转角速度，θ 为柱坐标极角．求作用于柱面上的切应力.

1.29　设绕圆球流动的速度分布为

$$v_R(R,\theta)=v\cos\theta\left[1-\frac{3}{2}\frac{a}{R}+\frac{1}{2}\frac{a^3}{R^3}\right],$$

$$v_\theta(R,\theta)=-v\sin\theta\left[1-\frac{3}{4}\frac{a}{R}-\frac{1}{4}\frac{a^3}{R^3}\right],$$

$$p(R,\theta)=-\frac{3}{2}\mu v\cos\theta\frac{a}{R^2}+p_0,$$

其中 v,p_0 为常数，a 为球半径，R,θ 为球坐标，求圆球上所受的应力.

1.30　设流动速度分布为

$$u=yzt,\quad v=zxt,\quad w=0.$$

粘度系数为 $\mu=0.01\mathrm{N\cdot s/m}$，求各切应力.

第二章 流体的平衡

如果流体相对于某一坐标系静止不动，我们就说流体在力学上处于平衡状态. 这一坐标系本身可以是惯性系，也可以是非惯性系. 后一种情形通常称流体处于相对平衡状态，研究流体平衡的科学称为流体静力学. 在本章第 1 节中我们将指出，平衡流体的最大特点是没有切应力，因而其应力张量可简化为用一标量——压强来表示，这就使得它的数学描述特别简单(数学描述见第 2 节). 下面几节将分别讨论平衡液体和气体中的压强分布以及它们作用于浸没在其中的物体上的力和力矩. 本章讲述的原理在机械、水利、船舶工程、仪器制造和地球物理、气象、天文等方面有着广泛的应用. 例如，测压计，虹吸管，水压机，液压制动闸，液压起重机，比重计，水工建筑和船舶设计，静止大气和星球的压强、密度和温度随高度分布等. 在本章的例题和习题中，读者可以找到不少应用实例.

2.1 流体平衡时的压强

第一章中已经指出，流体区别于固体的一个显著特点就是静止的流体不能承受切应力. 也就是说，在静止的流体中只存在法向应力，而没有切应力. 在 1.5 节中我们证明了，如果在静止流体中任取一个法向单位向量为 $\boldsymbol{n}$ 的面积元，那么作用在此面积元上的应力 $\boldsymbol{p}_{\mathrm{n}}$ 可表示为(参见(1.5.24)式后的说明)

$$\boldsymbol{p}_{\mathrm{n}} = -p\boldsymbol{n}. \tag{2.1.1}$$

这里引入负号，是因为静止流体中观测到的法向应力总是指向面积元内侧，即 $-\boldsymbol{n}$ 方向. 这样定义的标量 p 只是位置与时间的函数，而与面积元的取向 $\boldsymbol{n}$ 无关. p 表示静止流体中作用在该点任意取向的面积元上压应力的大小，叫做流体静力学压强，简称压强.

压强是流体力学中一个很重要的参数. 在国际单位制中压强的单位是帕(Pa)，这是为了纪念法国数学家帕斯卡(Pascal)对流体静力学的贡献而命名的. $1\mathrm{Pa}=1\mathrm{N/m^2}$.

以上所说的流体静止,都是相对于某一坐标系而言的. 这一坐标系可以是惯性坐标系,也可以是非惯性坐标系. 不管采用哪种坐标系,只要流体相对于该坐标系静止不动,在流体中都只有法向应力,而没有切应力,因而(2.1.1)式都成立. 这是因为从不同坐标系来观察同一运动,其差别只在于整体性的平移和旋转,而流体质点的变形没有差别. 如 1.6 节所述,流体内的应力只依赖于流体质点的变形而与整体性的平移和旋转无关. 在下文中,不管流体相对哪一种坐标系是静止的,我们都说流体在力学上处于平衡状态. 下一节首先介绍流体处于平衡时的一般规律. 在 2.3 节和 2.5—2.8 节中,着重讨论相对于地球静止的流体在重力场中的规律,而在 2.4 节中讲述两种典型非惯性坐标系下处于静止(又叫处于相对平衡)的流体所服从的特殊规律.

2.2　流体平衡的基本方程

让我们先来考察一下当静止流体中的压强不均匀时对流体微团所产生的作用力. 如图 2.1 所示,在笛卡儿坐标系之下取一个微元六面体 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,记其中心点的压强为 p. 那么如图所示,作用在左右两面上的压强所产生的 x 方向合力等于

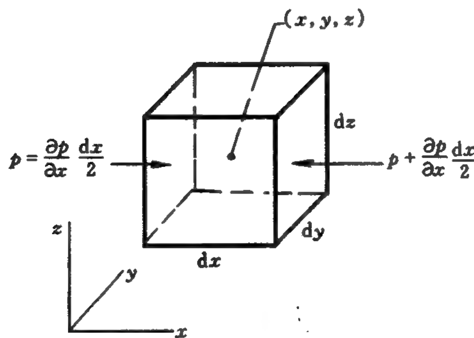


图 2.1　静止流体微元在 x 方向所受的压强合力

$$\left(p-\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{2}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{2}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

对 y 和 z 方向类似地分析,可知由于压强分布不均匀而产生作用在 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 上的合力为

$$\left(-\frac{\partial p}{\partial x}\boldsymbol{i}-\frac{\partial p}{\partial y}\boldsymbol{j}-\frac{\partial p}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-\nabla p\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \qquad (2.2.1)$$

这里∇p叫做压强p的梯度,定义为(又见附录F):

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\boldsymbol{k}. \tag{2.2.2}$$

如果在单位质量流体上还作用着体力$\boldsymbol{F}_b$,那么在平衡时这两种作用在$dxdydz$上力的合力应该为零:

$$\rho\boldsymbol{F}_b dxdydz - \nabla p dxdydz = 0.$$

由于微元$dxdydz$是任取的,我们得到

$$\rho\boldsymbol{F}_b = \nabla p. \tag{2.2.3}$$

对于均质流体($\rho=$常数),(2.2.3)式就是流体平衡的基本方程. 一旦给定体力分布,就可由此决定流体中的压强分布. 对于非均质流体,必须给出补充的关系以同时确定p和ρ. 这里又分两种情形:一种情形为密度ρ只是压强p的函数:$\rho=\rho(p)$,这种流体叫正压流体(更全面的定义见第3.6节);另一种情形为密度ρ除依赖于压强p之外还依赖于其他状态参数(例如温度T),这种流体叫斜压流体. 例如:等温或绝热的流体都是正压的,均质流体也是正压流体的一个特例,而地面附近的大气则是斜压的. 对于正压流体,除(2.2.3)式外只要补充$\rho=\rho(p)$即可. 对于斜压流体,除(2.2.3)式外还要补充一个状态方程(例如$\rho=\rho(p,T)$)和一个能量平衡关系式(例如热传导方程). 在本章第3至6节中主要讲均质流体,第7至8节中将给出非均质流体的例子.

由(2.2.3)式可以推知,并不是任意的体力分布都能使流体处于平衡状态. 将(2.2.3)式左右同时除以ρ再取旋度可知

$$\nabla\times\boldsymbol{F}_b = \nabla\times\left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right) = -\frac{1}{\rho^2}\nabla\rho\times\nabla p. \tag{2.2.4}$$

由此可得
$$\boldsymbol{F}_b\cdot\nabla\times\boldsymbol{F}_b = -\frac{1}{\rho^3}\nabla p\cdot(\nabla\rho\times\nabla p) \equiv 0,$$

于是可推断:为了使流体平衡,体力必须满足

$$\boldsymbol{F}_b\cdot\nabla\times\boldsymbol{F}_b = 0. \tag{2.2.5}$$

对于均质流体,由(2.2.4)可得体力无旋:

$$\nabla\times\boldsymbol{F}_b = 0, \tag{2.2.6}$$

也就是说均质流体平衡的必要条件是体力有势. 若体力势Π定义为

$$\boldsymbol{F}_b = -\nabla\Pi, \tag{2.2.7}$$

将它代入(2.2.3)式,对均质流体有

$$-\nabla\Pi = \nabla\frac{p}{\rho}. \tag{2.2.8}$$

对此式积分,并取积分常数为零,得

$$\Pi = -p/\rho, \tag{2.2.9}$$

即:平衡的均质流体的体力势等于 $-p/\rho$.

对于正压流体,由于 $\rho=\rho(p)$,可定义一个压力函数 $P(p)$使得

$$dP = \frac{dp}{\rho(p)}, \tag{2.2.10}$$

于是(2.2.3)式变为

$$\boldsymbol{F}_b = \frac{1}{\rho}\nabla p = \nabla P,$$

两侧取旋度得

$$\nabla\times\boldsymbol{F}_b = 0. \tag{2.2.11}$$

因此正压流体平衡的必要条件也是体力有势. 仿前可证,正压流体平衡时的体力势满足

$$\Pi = -P(p). \tag{2.2.12}$$

显然这时体力的等势面与等压面重合,又由 $\rho=\rho(p)$,等密度面与等压面重合. 所以平衡的正压流体中体力的等势面与等压面、等密度面三者重合.

对于斜压流体,等密度面与等压面不重合,因而(2.2.4)式右方$\nabla\rho\times\nabla p$ 不等于零,于是左方$\nabla\times\boldsymbol{F}_b$ 也不等于零,体力无势. 由此推知:斜压流体在有势力作用下不可能处于平衡态.

现在考虑两种互不混合静止流体的分界面. 设两侧流体密度各为 ρ_1 和 ρ_2,而压强 p 和单位质量的体力$\boldsymbol{F}_b$ 都跨过分界面连续. 那么沿界面上任一微元线段 $d\boldsymbol{l}$ 的压强增量 dp 在界面两侧分别可以写成

$$\begin{aligned} dp &= d\boldsymbol{l}\cdot\nabla p = d\boldsymbol{l}\cdot(\rho_1\boldsymbol{F}_b) \\ dp &= d\boldsymbol{l}\cdot\nabla p = d\boldsymbol{l}\cdot(\rho_2\boldsymbol{F}_b) \end{aligned} \tag{2.2.13}$$

由此二式分别除以 ρ_1,ρ_2 再相减得

$$\left(\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}\right)dp = 0.$$

当界面两侧密度不等($\rho_1\neq\rho_2$)时,应有 $dp=0$. 可见,两种密度不同的平衡流体的分界面必定是等压面. 如果体力有势,显然这一分界面也是体力的等势面.

由(2.2.13)式知,左方 $dp=0$ 必然导致 $d\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{F}_b=0$,即分界面垂直于体力的方向.

当体力有势时,分界面不仅是等压面和体力有势面,而且界面的每一侧也各自是等密度面. 这一点可由(2.2.4)式证明:因左侧$\nabla\times\boldsymbol{F}_b=0$,故右侧$\nabla\rho\times\nabla p=0$,即体力有势时平衡流体中等密度面与等压面重合. 这时,如果流体的状态方程是 $\rho=\rho(p,T)$的形式,这一分界面同时也是等温面.

实践中最常遇到的流体分界面是上方为气体的液面,称为自由面. 例如在重力 $\boldsymbol{F}_b=-g\boldsymbol{k}$ 作用下的平衡水面(这里 $g=$常数是重力加速度),就与重力的

等势面 $z=$ 常数一致，也就是人们常看到的“水平如镜”的水面．我国早在春秋战国时期，就利用水的这一特性制成了称为“准”的测定水平的仪器，为营造师所采用．这就是现代“气泡水准仪”的前身．又如，要研究地球表面大范围海洋的自由面形状，就必须考虑万有引力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{b}}=\frac{K}{r^3}\boldsymbol{r}$ 的作用，其中 $\boldsymbol{r}$ 是由地心发出的矢径，K 是常数．万有引力的等势面 $r=$ 常数是球面，也是与观测到的海洋表面形状一致的．

2.3 均质流体的静平衡

让我们考虑在地球表面重力场中静止不动的流体的平衡．在重力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{b}}=-g\boldsymbol{k}$ 作用下，(2.2.3)式变为

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x}&=0,\\ \frac{\partial p}{\partial y}&=0,\\ \frac{\partial p}{\partial z}&=-\rho g.\end{aligned}\tag{2.3.1}$$

这里取 z 轴竖直向上．这时压强 p 只随 z 而变，与 x,y 无关，因而(2.3.1)可改写成

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}=-\rho g.\tag{2.3.2}$$

上节已指出，这时流体如有分界面，它必定是垂直于 z 轴的平面．我们记流体在分界面上的压强为 p_0．注意在(2.3.2)式中，并未对密度 ρ 如何变化加以限制．在本节中，我们只考虑均质流体($\rho=$ 常数)．若取分界面为 $z=z_0$，将(2.3.2)式求积分，从分界面积分到任一 z 处，有

$$p=p_0+\rho g(z_0-z).$$

式中 z_0-z 不是别的，正是由分界面算起的流体深度 d(见图 2.2)，于是

$$p=p_0+\rho gd.\tag{2.3.3}$$

此式称为流体静力学规律．它表明：在重力作用下均质流体在深度为 d 处的压强等于分界面上压强 p_0 与高为 d、底为单位面积的流体柱重量之和．有时为了计算方便，把(2.3.3)式改写为

$$p=\rho g\left(d+\frac{p_0}{\rho g}\right)=\rho gd_{\mathrm{e}}\tag{2.3.4}$$

这里

$$d_e = d + \frac{p_0}{\rho g} \tag{2.3.5}$$

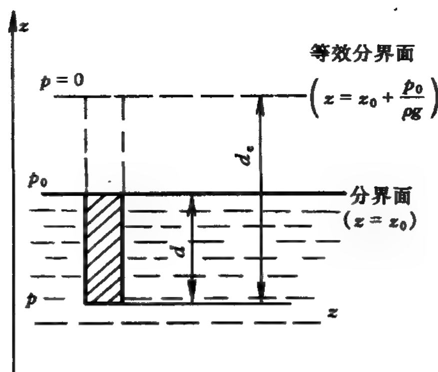


图 2.2　流体的等效分界面

叫做等效深度．这样做相当于假想地把分界面升高$\frac{p_0}{\rho g}$，让升高后的假想分界面(等效分界面)上压强变为零．这样算出的原分界面以下流体中压强与由(2.3.3)式算出的一样．

流体静力学规律说明，重力场中均质流体的压强随深度增加而线性增加．由此很容易说明为什么水坝断面要做成上面窄下面宽的形状，也能说明为什么虹吸管两侧能产生驱动流体的压差．这一点我国人民很早就有所认识．春秋时，《管子》即指出堤坝的纵断面要修成"大其下，小其上"的梯形．而在西方，直到约两千年后，即 1586 年 S. 斯蒂文才认识到流体静压强与深度的关系．现在，人们已应用流体静力学规律制成了各种各样的流体测压计，下面例题介绍其中最简单的一种．

例 2.1　U 形管流体测压计

图 2.3 的 U 形管一端开口接大气，另一端连通待测压强的气体 A，平衡时管内水银柱的位置如图所示．我们希望由所测得的 d_1, d_2 算出气体 A 在管口

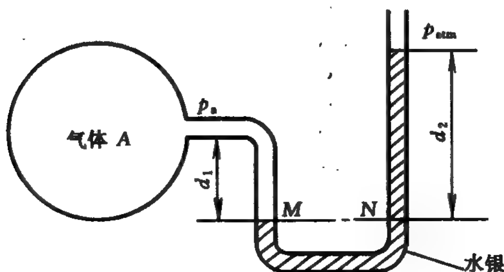


图 2.3　U 形管流体测压计

处的压强 p_a.

根据流体静力学规律,图中 M,N 两点的水银属于同一均质流体,又处于同一深度(即同一水平面上),应该有 $p_M=p_N$. 记大气压强为 p_{atm},则由(2.3.3)式有

$$p_N = p_{atm} + \rho_{水银}gd_2,$$
$$p_a = p_M - \rho_{气}gd_1.$$

令 p_M 与 p_N 相等,可得

$$p_a = p_{atm} + \rho_{水银}gd_2 - \rho_{气}gd_1.$$

因为水银的密度 $\rho_{水银}=1.36\times10^4\text{kg/m}^3$,远远大于气体的密度 $\rho_{气}$(例如,常温常压下为 $10^{-1}\sim10\text{kg/m}^3$ 的量级),故上式中最后一项通常可以忽略不计,我们有

$$p_a \approx p_{atm} + \rho_{水银}gd_2. \tag{2.3.6}$$

此式中 d_2 是平衡时水银柱两端的高度差. 在实用上常定义"表压"$p_g=p-p_{atm}$,而称第 2.1 节引入的压强 p 为绝对压强. 于是与 p_a 对应的表压就是

$$p_g = p_a - p_{atm} \approx \rho_{水银}gd_2. \tag{2.3.7}$$

它直接正比于观测到的 d_2,因而用起来很方便.

常用的 U 形管流体测压计除了用水银外,也有用水和酒精等液体的. 由(2.3.7)看到,在测量一定的压差时,使用的液体密度越大,d_2 就越小,因而所需的 U 形管长度就越短. 这就是为什么经常选用水银来测量较大的压差.

由于流体测压计的广泛应用,工程上常用液柱高差(d_2)作为单位来表示压强的大小,这些单位与国际单位(帕)的关系可由(2.3.7)式换算. 例如:1 毫米水银柱(mmHg)=133.32Pa,1 毫米水柱(mmH_2O)=9.806 7Pa.

为了提高测量精度,工程上设计了各种复杂形式的流体测压计(例如参看习题 2.3,2.4). 当测压计中采用不只一种液体时,要对每一种液体逐一应用均质流体的流体静力学规律找到不同点上压强的关系.

流体静力学规律(2.3.3)式还告诉我们:如果在静止均质流体的某一边界面上施加某一压强 p_0,那么这一压强就会均匀地传遍整个流体,数值不变. 这就是著名的帕斯卡原理(1653 年发现).

帕斯卡原理有重要的工程应用. 例如考虑图 2.4 中有两个活塞的装置,在活塞 C 上加一推力 F_C 会使流体产生一个压强增量 Δp,这一 Δp 会数值不变地传遍整个流体直到活塞 B,于是对活塞 B 产生一个推力 F_B. 设两个活塞表面积分别为 S_C 和 S_B,则

$$\frac{F_B}{F_C} = \frac{\Delta pS_B}{\Delta pS_C} = \frac{S_B}{S_C}, \tag{2.3.8}$$

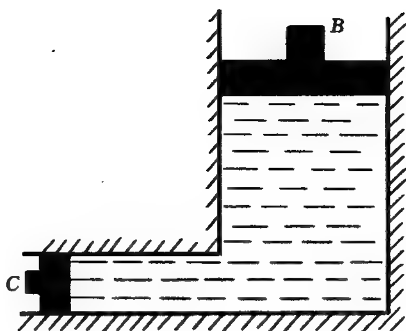


图 2.4　帕斯卡原理示意图

显然，当 S_B 远远大于 S_C 时，在活塞 B 上产生的推力 F_B 要比原来在活塞 C 上施加的推力 F_C 大得多. 就这样，帕斯卡原理帮助我们放大了作用力. 这个放大了的力用来进行压力加工，就做成了水压机；用来举重，就做成了液压千斤顶；用来刹车，就做成了液压制动闸.

前面我们讲的都是均质流体. 最后顺便指出，重力场中的非均质流体除非在每一水平层内密度不变，否则不能保持平衡. 这是因为，如(2.3.1)式所示，压强 p 只是 z 的函数而与水平坐标 x、y 无关，因而在 z 与 $z+\mathrm{d}z$ 两层间的压强差 $\mathrm{d}p$ 是一确定值，与水平位置无关，而这一压差必然与两层间单位底面积上流体重量 $\rho g\mathrm{d}z$ 相平衡，而与水平位置无关. 于是密度 ρ 必须不随水平位置而变. 因而重力场中非均质流体都是分层的，密度只沿竖直方向变化，而在每一水平层上各自不变.

2.4　非惯性系中均质流体的相对平衡

上一节的流体静力学规律是对于静止的均质流体导出的，同样也适用于象刚体一样做匀速直线运动的均质流体，例如在一容器中作整体匀速直线平移的均质流体. 因为这时流体相对于容器是静止的，而容器本身就是一个惯性系.

但是如果容器做变速运动，即使其中的流体相对于容器静止，也不能直接引用上节的结果，因为这时容器本身是一个非惯性系. 我们知道，在非惯性系中应用牛顿力学定律时必须引入惯性力. 因此，只有令(2.2.3)式中的体力 $\boldsymbol{F}_\mathrm{b}$ 包含惯性力在内，该式才能成立. 本节只讨论容器做匀加速直线运动或绕竖直轴匀角速度旋转时，其中均质流体在重力场中的相对平衡.

(一) 均质流体整体地做匀加速直线运动

取 z 轴竖直向上，xz 平面平行于容器(和流体)的匀加速度 $\boldsymbol{a}$(图 2.5)，则 $\boldsymbol{F}_b=\boldsymbol{g}-\boldsymbol{a}$，其中 $-\boldsymbol{a}$ 是单位质量流体上的惯性力. 于是(2.2.3)式变为

$$\nabla p=\rho(\boldsymbol{g}-\boldsymbol{a}). \tag{2.4.1}$$

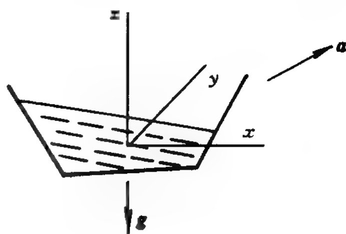


图 2.5 匀加速直线运动容器中的流体

我们知道，自由面是等压面，因而它的法线指向∇p 方向，亦即 $\boldsymbol{g}-\boldsymbol{a}$ 方向. 注意到 $\boldsymbol{g}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 都是常数，因而自由面仍然是平面，只不过不再是水平，而是倾斜一个角度，使得

$$\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)_{\text{自由面}}=-\frac{a_x}{g+a_z}. \tag{2.4.2}$$

流体中的压强分布可由积分(2.4.1)式而得：

$$\begin{aligned}p&=\int\mathrm{d}p=\int\nabla p\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\rho\int(\boldsymbol{g}-\boldsymbol{a})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\\&=\rho\int[-a_x\mathrm{d}x-(g+a_z)\mathrm{d}z]\\&=-\rho a_x x-\rho(g+a_z)z+C.\end{aligned} \tag{2.4.3}$$

在自由面上 $p=$常数，由此可求得自由面的形状，与(2.4.2)式一致.

(二) 均质流体整体地绕竖直轴以匀角速度旋转

考虑一圆柱形容器绕竖直向上的 z 轴以匀角速度 Ω 旋转，让我们来求其中与容器一起整体旋转的均质流体在重力场中的压强分布和自由面形状. 这时流体中单位质量的惯性力是离心力 $\Omega^2 r\boldsymbol{e}_r$，其中 r 是到 z 轴的距离，$\boldsymbol{e}_r$ 是柱坐标中的径向单位向量(图 2.6). 于是(2.2.3)式变为

$$\nabla p=\rho(\boldsymbol{g}+\Omega^2 r\boldsymbol{e}_r) \tag{2.4.4}$$

下面求流体中的压强分布：

$$\begin{aligned}p&=\int\mathrm{d}p=\int\nabla p\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\rho\int(\boldsymbol{g}+\Omega^2 r\boldsymbol{e}_r)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\\&=\rho\int[-g\mathrm{d}z+\Omega^2 r\mathrm{d}r]\\&=-\rho gz+\frac{1}{2}\rho\Omega^2 r^2+C.\end{aligned} \tag{2.4.5}$$

在自由面上 $p=$常数，由此可得自由面形状

$$z=\frac{\Omega^2}{2g}r^2+\text{常数}. \tag{2.4.6}$$

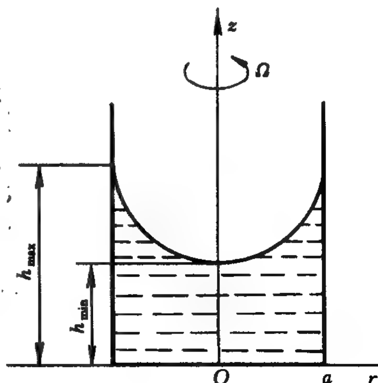


图 2.6 旋转圆筒中流体的自由面形状

此式说明自由面是一个旋转抛物面，旋转角速度 Ω 越大，这个抛物面就变得越细高. 利

用这个原理，如果量出图 2.6 中的 h_{max} 和 h_{min} 就可以算出容器的旋转角速度：

$$\Omega = \frac{1}{a}\sqrt{2g(h_{max} - h_{min})}.$$

本节的原理已在工程上实际用来测量线加速度，角速度和流体的压强(参见习题 2.5,2.6).

2.5　均质流体作用在物体表面的压强合力

由第 3 节知，在重力场中静止均质流体的压强随深度而变. 这一节将要计算此压强作用在浸没于流体中的物面上时所产生的合力的大小、方向和作用线. 我们将分别考虑平壁和曲壁.

(一) 均质流体作用于平壁上的压强合力

图 2.7 画的是一个斜置的平壁，我们要计算其上表面所受到的流体压强合力 $\boldsymbol{F}_R$，由于静止流体中没有切应力，而压强都沿法向指向平壁，所以流体合力方向显然垂直于平壁并指向内侧. 下面只需求作用力的大小和作用线.

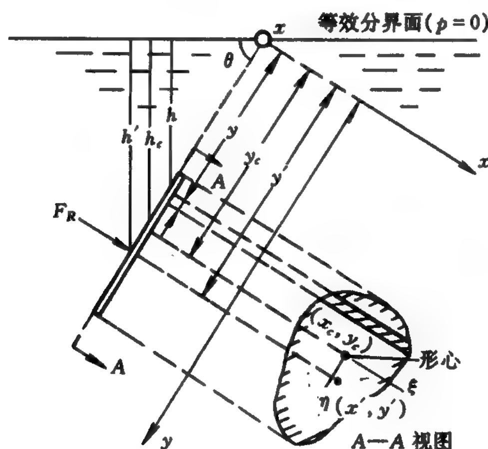


图 2.7　求平壁在静止流体中受力的示意图

我们首先按第 2.3 节的方法找到等效分界面(其上为大气时称为等效自由面)，取平壁延长面与等效分界面交线为 x 轴，而 y 轴沿平壁面指向斜下方(如图 2..7 所示). 设平壁与水平面夹角为 θ，则平壁上任一点的压强应为(见(2.3.4)式)：

$$p = \rho g h = \rho g y \sin\theta.$$

如图取 y 与 $y+\mathrm{d}y$ 之间的狭条壁面，其所受力为 $p\mathrm{d}S$，其中 $\mathrm{d}S$ 是狭条的面积，于是整个壁面所受合力为：

$$F_{\mathrm{R}} = \int p\mathrm{d}S = \rho g\sin\theta\int y\mathrm{d}S,$$

积分对整个壁的上表面进行. 注意

$$\int y\mathrm{d}S = y_c S,$$

这里(x_c, y_c)是壁面的形心坐标，S 是壁面的面积. 于是我们有

$$F_{\mathrm{R}} = \rho g y_c \sin\theta S = \rho g h_c S. \tag{2.5.1}$$

但是 $\rho g h_c$ 正是壁面形心所受到的流体压强，记作 p_c，最后得到

$$F_{\mathrm{R}} = p_c S. \tag{2.5.2}$$

此式告诉我们，静止均质重流体中平壁所受流体合力的大小等于平壁表面形心处所受的压强乘上壁面面积，也就是等于假想壁面处处都受到均匀压强 p_c 时的合力值. 这一公式对于平壁成任意倾角放置时都成立.

但是事实上壁面的压强并不是均匀分布的，而是越深的地方压强越大，因而可以想到合力作用线不会通过表面形心，而应比形心深一些. 假定合力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$ 的作用线通过(x', y')，而把通过(x_c, y_c)平行于 x，y 两个轴的坐标轴分别记作 ξ，η（图 2.7），那么 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$ 对于 ξ 轴和 η 轴的力矩应分别等于分布压强所引起的相应力矩，即

$$\left.\begin{aligned} F_{\mathrm{R}}(y' - y_c) &= \int p\eta\mathrm{d}S = \rho g\sin\theta\int y\eta\mathrm{d}S, \\ F_{\mathrm{R}}(x' - x_c) &= \int p\xi\mathrm{d}S = \rho g\sin\theta\int y\xi\mathrm{d}S. \end{aligned}\right\} \tag{2.5.3}$$

注意到 $y = y_c + \eta$，有

$$\left.\begin{aligned} \int y\eta\mathrm{d}S &= y_c\int\eta\mathrm{d}S + \int\eta^2\mathrm{d}S = 0 + I_{\xi\xi}, \\ \int y\xi\mathrm{d}S &= y_c\int\xi\mathrm{d}S + \int\xi\eta\mathrm{d}S = 0 + I_{\xi\eta}. \end{aligned}\right\} \tag{2.5.4}$$

这里用到了形心 $\xi_c = \eta_c = 0$ 的性质，$I_{\xi\xi}$ 和 $I_{\xi\eta}$ 分别是平壁表面的二阶惯性矩，定义为

$$I_{\xi\xi} = \int_S \eta^2\mathrm{d}S, \quad I_{\xi\eta} = \int_S \xi\eta\mathrm{d}S. \tag{2.5.5}$$

将(2.5.1)代入(2.5.3)，化简后得到

$$\left.\begin{aligned} y' - y_c &= \frac{I_{\xi\xi}}{y_c S}, \\ x' - x_c &= \frac{I_{\xi\eta}}{y_c S}. \end{aligned}\right\} \tag{2.5.6}$$

因为 $I_{\xi\xi}>0$，可知 $y'>y_c$，合力作用点深于壁面形心．$I_{\xi\xi}$ 和 $I_{\xi\eta}$ 的定义由(2.5.5)给出，注意 ξ 和 η 轴是通过形心的坐标轴．规则形状的 $I_{\xi\xi}$ 和 $I_{\xi\eta}$ 常可由手册查出．

例 2.2　一水箱尺寸如图 2.8 所示，箱外大气压 $p_{atm}=1.013\times10^5$Pa，试计算下列两种情况下窗口 AB 两侧所受的流体合力：

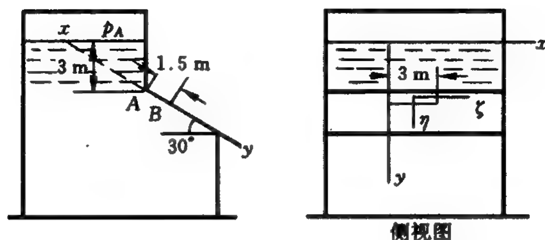


图 2.8　例 2.2 示意图

(a) 水面上方气体压力 $p_A=p_{atm}$；

(b) $p_A=1.255\times10^5$Pa.

解　(a)由于 $p_A=p_{atm}$，根据帕斯卡原理，p_A 均匀地、量值不变地传到 AB 内表面，与外表面所受均匀的 p_{atm} 相互抵消，因而这一问题中 p_A 和 p_{atm} 可都不考虑，或者说本问题中的压强都用“表压”$p-p_{atm}$ 即可．由于水面上方表压为零，水面本身就是等效自由面，本节中的坐标 x,y 和 ξ,η 如图 2.8 所示．

由(2.5.2)、(2.5.1)和(2.5.6)有

$$
\begin{aligned}
F_R &= p_c S = \rho g h_c S \\
&= 1\,000\times9.8\times\left(3+\frac{1}{2}\times1.5\times\sin30^\circ\right)\times(3\times1.5) \\
&= 1.488\times10^5\ \text{N},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y'-y_c &= \frac{I_{\xi\xi}}{y_c S} = \frac{\frac{1}{12}\times3\times1.5^3}{(3/\sin30^\circ+1.5/2)\times(3\times1.5)} \\
&= 0.027\,78\ \text{m},
\end{aligned}
$$

$$
x'-x_c = \frac{I_{\xi\eta}}{y_c S} = 0.
$$

式中用到了矩形的二阶惯性矩 $I_{\xi\xi}=\frac{1}{12}bh^3$，此处 b 和 h 分别是矩形平行与垂直 ξ 轴的边长，$I_{\xi\eta}=0$ 是因为矩形对 ξ 和 η 轴都对称．

(b) 此时 $p_A>p_{atm}$，根据帕斯卡原理，p_A 均匀地、量值不变地传到 AB 内

侧. 此时 AB 两侧所受的流体合力等于(a)中算出的水压合力(1.488×10^5N,作用在形心以下 $y'-y_c=0.027\ 78$m 处)与两侧气压合力之和,后者的作用点在形心,数值等于

$$(p_A - p_{atm})A = (1.255\times10^5 - 1.013\times10^5)\times(3\times1.5)$$
$$= 1.089\times10^5\text{N}.$$

根据平行力求合力的法则,水与气的压强合力大小为 2.577×10^5N,作用点矩形心 $y'-y_c=0.016\ 04$m(如图 2.9 所示).

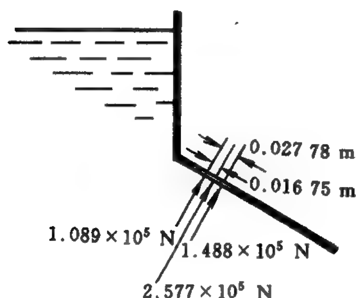


图 2.9 例 2.2 力的合成示意图

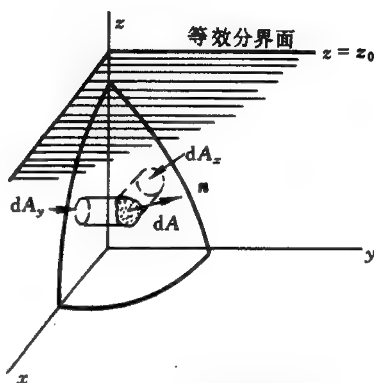


图 2.10 求曲壁在静止流体中受力水平分量的示意图

对于情况(b),如果按前面讲的把水面假想升高 $p_A/\rho g$ 作为等效分界面,然后应用(2.5.2)和(2.5.6)式,也会得到同样结果,读者可自行验证.

(二) 均质流体作用于曲壁上的压强合力

现在我们讨论如何计算静止均质重流体中曲壁面所受的流体压强合力. 如图(2.10)所示,在此曲壁面上任取一小微元面积 dS,记其外法线单位向量为 $\boldsymbol{n}$,则此面元上受到的流体压强合力为

$$d\boldsymbol{F} = -p\boldsymbol{n}dS.$$

很明显,它有两个平行于等效自由面($z=z_0$)的分量 dF_x,dF_y 和一个竖直分量 dF_z. 注意

$$dF_x = d\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{i} = -p\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{i}dS = -pdS_x,$$

这里 dS_x 是微元面积 dS 在 yz 平面上的投影(代数值),于是我们有

$$F_x = -\int_{S_x} pdS_x. \tag{2.5.7a}$$

类似地

$$F_y = -\int_{S_y} pdS_y. \tag{2.5.7b}$$

这就是说,曲壁面所受流体压强合力的 x 分量,恰好等于此曲壁面在 yz 平面上的投影 S_x 上所受的流体压强合力. 于是求曲壁面所受水平合力的问题就化为前面所讲的求平壁面所受合力的问题,它的大小、方向和作用线都完全可用前面讲的方法求解.

现在来求曲壁面受力的竖直分量.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}F_z &= \mathrm{d}\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{k} = -p\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{k}\mathrm{d}S \\ &= -\rho g(z_0 - z_S)\mathrm{d}S_z . \end{aligned}$$

由图 2.11 看出,这个力的大小等于 $\mathrm{d}S$ 以上直到等效分界面这块体积充满该种流体时的重量. 因此,我们可以说,曲壁面 S 所受流体压强合力的竖直分量 F_z 的大小等于该曲面以上直到等效分界面之间的体积(称为压力体)都充满该种流体时的重量,指向曲壁内侧沿竖直方向. 注意这里所说的曲面与等效分界面之间的压力体是一个假想的概念,不一定真的处处充满流体. 例如,要计算图2.12 中湖岸 ABC 段所受的竖直方向合力,可以分别计算 AB 段和BC 段的受力. AB 段所受竖直方向合力等于体积 ABD 中假想地充满湖水时的重量,方向向上;BC 段受竖直方向合力则等于体积 $BCAD$ 假想地充满湖水时的重量,方向向下. 两者相加,体积 ABD 重量引起的力一个向上、一个向下互相抵消,作用于 ABC 段的竖直方向合力等于体积ABC 中充满湖水时的重量,方向向下.

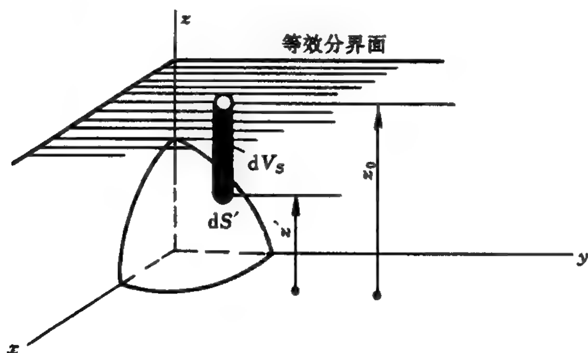


图 2.11　求曲壁在静止流体中受力竖直分量的示意图

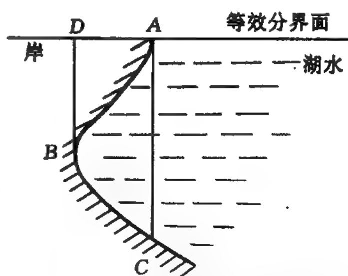


图 2.12　曲面湖岸所受流体垂直方向合力示意图

现在讨论 F_z 的作用线位置,假定 F_z 的作用线通过(x', y'),那么按合力作用线的定义

$$F_z x' = \int_{S_z} p x \mathrm{d}S_z = \rho g \int_{S_z} x(z_0 - z_S)\mathrm{d}S_z$$
$$= \rho g \int_{V_S} x dV_S. \tag{2.5.8}$$

式中 $\mathrm{d}V_S = (z_0 - z_S)\mathrm{d}S_z$，表示 d$S$ 以上直到等效分界面这一微元的体积(图 2.11)，V_S 是整个曲壁面以上压力体的体积，定义(x_c, y_c, z_c)为压力体几何中心的坐标，按定义

$$x_c = \frac{1}{V_S}\int_{V_S} x\mathrm{d}V_S, \quad y_c = \frac{1}{V_S}\int_{V_S} y\mathrm{d}V_S. \tag{2.5.9}$$

将(2.5.9)代入(2.5.8)，并注意

$$F_z = \rho g V_S, \tag{2.5.10}$$

可得 $x' = x_c$，类似地有 $y' = y_c$. 这就是说，静止均质重流体中曲壁面所受竖直方向的流体压强合力的作用线通过该曲面以上压力体的几何中心.

注意，在一般情况下 F_x，F_y 和 F_z 三个分力不一定共点，可能构成空间力系. 这时不能化为单个合力，只能化为一个合力加上一个合力偶.

例 2.3 图 2.13 所示的圆柱形堰，直径 $2R = 3$m，长 $L = 6$m. 试求两侧静止流体作用于堰上的合力大小，方向及作用线.

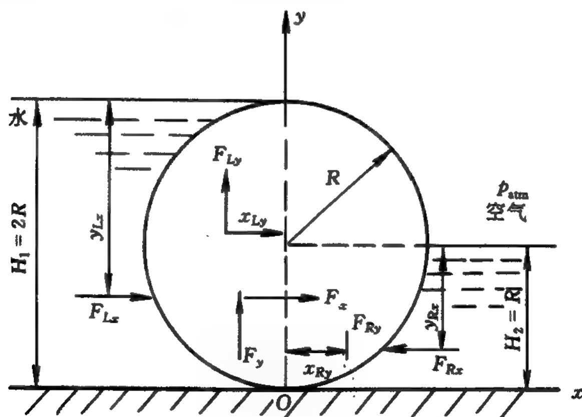


图 2.13 例 2.3 示意图

解 空气的压强通过两侧的水均匀地、量值不变地传到堰的水下表面，因此整个圆柱侧面处处均匀地受到大气压作用，互相抵消，合力为零. 因此，在计算两侧流体合力时，不考虑大气压强，或者说我们只考虑“表压”即可. 这就是说，两侧的水面就是等效自由面. 由于沿长度 L，压强是不变的，合力通过 $L/2$ 处的中截面.

先考虑左半堰所受水的作用力,按图所取坐标它只有 x,y 分量,分别记作 F_{Lx} 和 F_{Ly},它们的作用线分别距左侧水面 y_{Lx} 和距 y 轴 x_{Ly},于是由(2.5.7)和(2.5.2)有

$$F_{Lx} = \left(\rho g \frac{H_1}{2}\right)(H_1 L) = 2\rho g R^2 L$$

这里 S_x 是边长分别为 H_1 和 L 的矩形. 由(2.5.6)式,有

$$y_{Lx} - R = \frac{\frac{1}{12}LH_1^3}{\frac{H_1}{2}(H_1 L)} = \frac{1}{3}R.$$

由(2.5.10)有

$$F_{Ly} = \rho g\left(\frac{1}{2}\pi R^2 L\right) = \frac{\pi}{2}\rho g R^2 L,$$

它通过左半圆的几何中心

$$x_{Ly} = \frac{\int x \mathrm{d}S}{S} = -\frac{4R}{3\pi}.$$

类似地求得右半堰所受水的作用力分量为

$$F_{Rx} = \frac{1}{2}\rho g R^2 L \quad \left(\text{作用线}: y_{Rx} = \frac{2}{3}R\right),$$

$$F_{Ry} = \frac{\pi}{4}\rho g R^2 L \quad \left(\text{作用线}: x_{Ry} = \frac{4R}{3\pi}\right).$$

总合力相当于两半堰受力的向量和:

$$F_x = F_{Lx} - F_{Rx} = \frac{3}{2}\rho g R^2 L = 1.98 \times 10^5 \mathrm{N},$$

$$F_y = F_{Ly} + F_{Ry} = \frac{3\pi}{4}\rho g R^2 L = 3.11 \times 10^5 \mathrm{N},$$

$$F_R = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 4.82 \times 10^5 \mathrm{N}.$$

合力的作用线通过(x', y')点: $x' = \frac{-7}{9}R = -1.17\mathrm{m}$, $y' = \frac{4R}{9\pi} = 0.212\mathrm{m}$,合力的方向与 x 轴成 α 角, $\alpha = \tan^{-1}\frac{F_y}{F_x} = 57.5°$.

例 2.4 与水平液面成 45°的斜壁上有一半径为 R 的圆孔,孔心的深度为 H,现用一个半球面堵住孔,如图 2.14 所示. 试求半球面所受液体压强合力 $\boldsymbol{F}$ 的大小和方向(不计大气压强的作用).

解法一 半球面的水平投影是椭圆:

$$S_x = \pi R^2 \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi R^2,$$

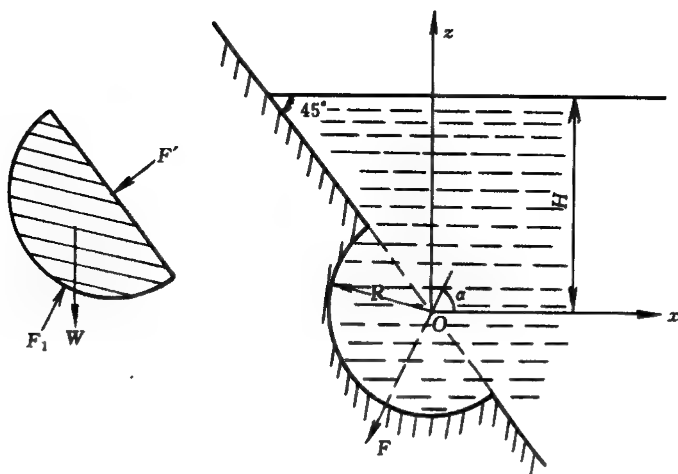


图 2.14 例 2.4 示意图

$$F_x = -\rho g H S_x = -\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\rho g H R^2.$$

压力体为半球加上斜截椭圆柱体：

$$V_S = \frac{2}{3}\pi R^3 + \pi R^2 H\cos 45^\circ = \left(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{H}{R}\right)\pi R^3,$$

$$F_z = -\rho g V_S = -\left(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{H}{R}\right)\pi\rho g R^3.$$

由此可以算出合力的大小

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_z^2} = \pi\rho g R^2\sqrt{\frac{4}{9}R^2 + H^2 + \frac{2\sqrt{2}}{3}RH}.$$

它与 x 轴的夹角

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{F_z}{F_x} = \tan^{-1}\frac{\frac{2}{3}R + \frac{\sqrt{2}}{2}H}{\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

由于半球面上各点的压强都通过半球中心 O，是共点力系，故其合力 $\boldsymbol{F}$ 必然也通过 O 点.

解法二 如图 2.14 的左图，取半球中液体为分离体，它在孔平面压强合力 $\boldsymbol{F}'$，自身重力 $\boldsymbol{W}$ 和半球面反力 $\boldsymbol{F}_1$ 的作用下达到平衡.

$F' = \rho g H \cdot \pi R^2$，通过 O 点垂直孔平面指向斜下方，

$W = \frac{2\pi}{3}R^3 \cdot \rho g$，通过半球的几何中心竖直向下，

$$F_1 = F, \quad \text{与 } F \text{ 方向相反(待定)}.$$

由三力平衡可以解出 F 的大小、方向和作用线位置,结果同解法一(请读者自行补上过程).

本节所讲的计算静止均质流体中平壁和曲壁受力的方法在工程上有重要应用,例如设计船舶,水坝,闸门,储油罐,桥墩等.

2.6 阿基米德定律,浮体的平衡

我们现在讨论全部浸没在静止均质流体中的物体在重力场中所受到的流体作用力.

如图 2.15 所示,物体 $ABCD$ 的左右两半 ABC 和 ADC 在 yz 平面上的投影分别是 S_x 和 $-S_x$,因而它们所受流体压强的 x 向合力互相抵消. 由此可以推断,浸没在静止均质重流体中的物体所受的流体作用力只有竖直分量而没有水平分量.

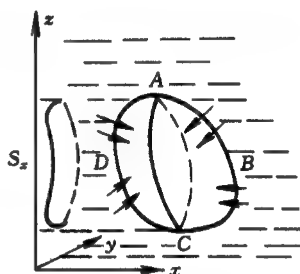


图 2.15 浸没在流体中的物体所受流体合力水平分量为零

再看竖直方向的合力,图 2.16 分别标出了上、下表面和全部表面所受合力相当的压力体,箭头表示合力方向. 由此可见,浸没在静止均质重流体中物体所受的流体作用力方向竖直向上,大小等于物体所排开体积中充满该种流体时的重量. 这一流体作用力称为浮力. 仿照上节的方法,还可以证明,浮力的作用线通过物体所排开体积的几何中心,因此,这一几何中心也叫做浮力中心.

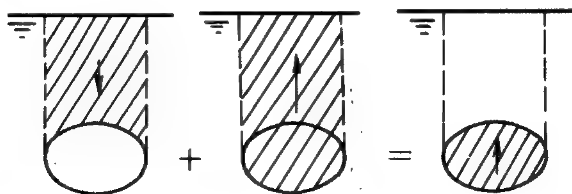


图 2.16 浸没在流体中的物体所受浮力产生原理示意图

上述的结论不仅适用于物体完全浸没于流体中的情形,也很容易推广到物体浮在液体表面的情形. 例如,考虑图 2.17 所示的浮体,它暴露在大气中的部分所受到的大气压强是均匀的. 根据帕斯卡原理,大气压不仅均匀地作用于水面以上的物面,同样也均匀地、量值不变地传遍水面以下的物体表面,因而大气

压对于物体不产生合力,而水自身的压强作用于水面下物体产生的合力竖直向上(没有水平分量),大小等于压力体 BCD 的重量. 所以,对于部分浸没在静止均质重流体中的物体,其浮力等于它所实际排开流体(图中 BCD)的重量,而不是与它同体积($ABCDE$)流体的重量. 可以证明,这时浮力中心是它实际排开流体体积的几何中心.

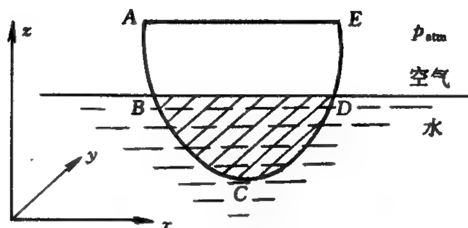


图 2.17 浮在一种流体表面的物体所受的浮力示意图

古希腊科学家阿基米德总结了流体中物体所受浮力遵从的规律,这就是著名的阿基米德定律. 这一定律指出:全部或部分浸没在静止均质流体中物体在重力场中所受的浮力竖直向上,大小等于它所排开该流体的重量,作用线通过它所排开该流体的重心.

根据阿基米德定律,全部或部分浸没在静止均质重流体中物体平衡的条件是:物体所受重力与浮力大小相等,方向相反而且作用线重合(也就是浮力中心与物体重心在同一竖直线上). 人们设计的船舶和飞艇等能浮在水面或空中,便是利用了这一原理. 阿基米德定律还能用于测量流体的比重(见以下例题及习题 2.13)和用于构造自动控制装置(见习题 2.12).

例 2.5 液体比重计

某一液体的比重 S 指的是它的密度 ρ 与水密度(常温下 $\rho_{H_2O}=1\,000\text{kg/m}^3$)之比. 比重计是一个如图 2.18 所示的玻璃管,下装金属小球,上管内横截面积 A 均匀. 先把它放在蒸馏水中校准(左图),在水平面处画一个刻度线,测出浸没的体积 V_0. 然后把它放入待测比重的液体中,那么它的刻度线一般不再在液面处. 假定刻度线升出液面 Δh 高(右图),我们便可由 Δh 推算出此液体的比重 S.

首先由比重计在水中的平衡,知其重量 W 等于浮力:

$$W = \rho_{H_2O} g V_0.$$

再考虑右图的液体中比重计的平衡:

$$W = \rho g (V_0 - A\Delta h).$$

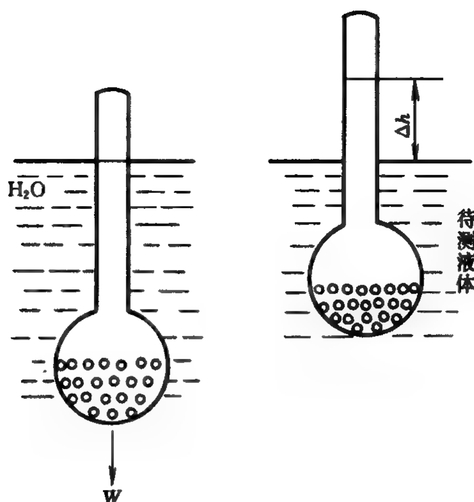


图 2.18　液体比重计

令两式中 W 相等,并根据定义

$$S=\frac{\rho}{\rho_{H_2O}},$$

得到

$$S=\frac{V_0}{V_0-A\Delta h}.$$

由此可解出

$$\Delta h=\frac{V_0}{A}\frac{S-1}{S}.$$

如果按此式给定不同 S 值算出相应 Δh,先标在比重计的玻璃上,只要把比重计一插入液体,马上就可以读出它的比重,使用十分方便.

我国人民很早就对浮力的规律有所认识,并在许多方面得到应用. 众所周知的三国时代“曹冲称象”的故事,就是利用浮力与重力平衡的原理. 宋代僧人怀丙在打捞沉于河底的铁牛(重数万斤)时,将铁牛系于两条满载土石的大船,慢慢卸去土石,船在浮起时即将铁牛拉出水面. 怀丙创造的浮力起重法,到了 16 世纪才在欧洲由意大利数学家 H. 卡丹设计并使用. 英国著名科技史学家 I. 李约瑟指出:“在现代,怀丙的方法已成为标准的实用的方法”. 北魏贾思勰的《齐民要术》记载了用精心挑选的莲子、鸡蛋等物投入盐水、观测其沉浮以测定盐卤的浓淡,实际上和例 2.5 所述现代的液体比重计的原理是完全一致的.

现在我们简单地讨论一下浸没在静止重流体中的物体的稳定性问题. 例如,一只船的浮力中心与重心本来在一竖直线上,是平衡的. 突然一阵风把它吹得倾侧了,那么当这阵风过后它是会翻倒呢,还是会恢复平衡? 这便是稳定性问

题. 如果它恢复平衡,我们说原来的平衡态是稳定的,若翻倒则就是不稳定的.

我们首先讨论完全浸没在静止重流体中物体的稳定性. 例如,图 2.19 所示的气球,由于载重集中在下方的吊篮,而浮力主要是上方的轻气球产生的,所以显然浮力中心高于重心. 当浮力中心与重心在一竖直线上时,它是平衡的(左图). 假设一阵风把气球吹偏,如右图所示,浮力中心与重心不成一条线,浮力 F_B 和重力 W 就产生了一个力矩. 显然,这个力矩的方向是使气球趋于回到平衡位置. 因此我们说它是稳定的. 读者可以分析一下,如果把吊篮装到气球顶上,被一阵风吹偏后,它还会恢复平衡吗? 显然不会. 由此我们可以论断:完全浸没在静止流体中的物体,若其浮力中心高于重心,平衡是稳定的;若其浮力中心低于重心,平衡是不稳定的.

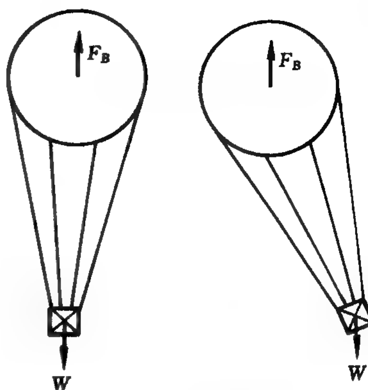


图 2.19 气球的稳定性

部分浸没在静止重流体中物体的平衡稳定性问题要复杂一些. 例如,考虑

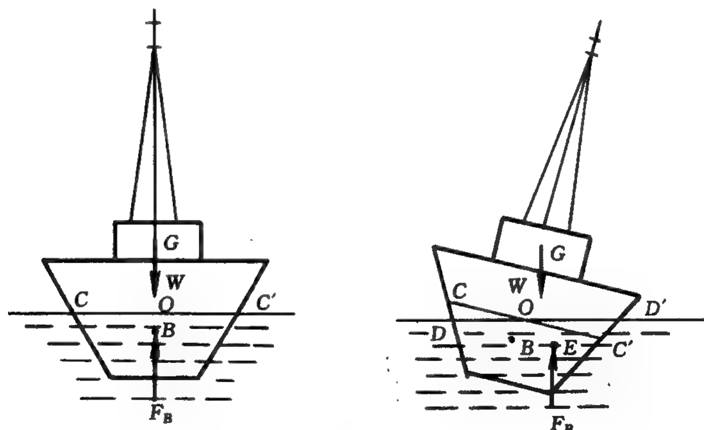


图 2.20 船舶的稳定性

图 2.20 中浮在水面的船. 左图示平衡位置,浮力中心 B 在水面以下,而载重常集中到水面以上的船体中,因而重心 G 高于浮力中心 B. 这时如果船倾侧如右图,它还能不能恢复平衡呢? 注意:与完全浸没在水中的物体不同,浮在水面上的船在左右两图中排开水的位置是互不相同的. 左图中排开的是吃水线 CC' 以下的水,右图中则排开吃水线 DD' 以下的水. 两者相比较,右图比左图少排开左

方 OCD 中的水而多排开右方 $OC'D'$ 的水. 所以右图排水体积的几何中心应比左图排水体积几何中心向右移动,例如由 B 点移到 E 点. 根据阿基米德定律,浮力中心就是所排水体积的几何中心,因此右图中的浮力 F_B 不再通过 B 点,而是通过 E 点. 我们把过 E 点的竖直线与 BG(或其延长线)的交点 M 叫做定倾中心. 很显然,如果 M 点高于 G 点,那么右图中浮力 F_B 与重力 W 产生的力矩使船趋于恢复平衡. 若 M 点低于 G 点,则 F_B 与 W 产生的力矩使船趋于偏离平衡. 于是我们可以论断:部分浸没在静止重流体中物体平衡的稳定性,取决于物体重心与定倾中心的相对位置:若定倾中心高于重心,物体的平衡是稳定的;若定倾中心低于重心,物体的平衡是不稳定的. 这就是为什么船的重心高于浮力中心时仍能保持稳定平衡. 定倾中心的位置不仅依赖于平衡时物体重心与浮力中心的相对位置,也依赖于吃水线上物体横截面的转动惯量,流体的密度和物体的重量,详细的计算可参看有关的专业书籍(例如,参考书的[12]的第 3 章).

* 2.7　大气的平衡,国际标准大气

前面几节主要讨论均质流体,其中密度 $\rho=$ 常数. 本节以地球表面上的大气为例,说明如何研究非均质流体的平衡. 仍取 z 轴竖直向上,那么在均匀重力场中($g=$ 常数)(2.3.2)式成立:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}=-\rho g. \tag{2.7.1}$$

和均质流体不同的是,这里 ρ 是变数. 对于大气,我们有状态方程

$$p=\rho RT. \tag{2.7.2}$$

这里 R 是气体常数,对空气 $R=287\mathrm{J/(kg\cdot K)}$,$T$ 是大气的绝对温度(K). 这样一来,除了 p 和 ρ 以外又引入了第三个变量 T,因而需要补充第三个方程(例如由能量守恒导出的热传导方程).

事实上,大气中 p,ρ,T 等参数随高度 z 的变化规律不仅随地点而异,而且随季节,昼夜,气候等无时无刻不在变化着. 为了设计和试验飞行器的需要和为了便于比较不同国家飞机和火箭的性能,国际上根据多年观测结果,约定建立一个大气模型,代表大气中参数随高度变化的平均规律,这一模型叫做国际标准大气.

国际标准大气规定:海平面 $z=0$ 处的大气参数为

$$\begin{cases}\text{温度 } T_0=288\mathrm{K}=15℃,\\ \text{密度 } \rho_0=1.225\mathrm{kg/m^3},\\ \text{压强 } p_0=1.013\times10^5\mathrm{Pa}=760\mathrm{mmHg}.\end{cases} \tag{2.7.3a}$$

$z=0\sim11\mathrm{km}$ 的范围内温度直减率 $=-6.5℃/\mathrm{km}$.

海平面处的压强值又叫做1个标准大气压,简称大气压(atm),工程上也常用作压强的单位.

现在考察大气中的温度 T 随高度的分布.在高度 z 处取一块水平的单位面积,以它为底和 $\mathrm{d}z$ 为高做一微元六面体,考虑它的能量守恒.由于大气是静止的,没有机械能变化也没有对流传热;又由于温度 T 只随高度 z 而变,所以在水平方向没有热传导,而由底面传导入的热量 q 等于由顶面传导出的热量 $q+\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z$,即有 $\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}z}=0$.注意第1.1节的傅里叶定律(1.1.11)式给出 $q=-k\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}$,于是有

$$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}z^2}=0 \tag{2.7.3b}$$

通常将 $z=0\sim11\mathrm{km}$ 与 $z=11\sim50\mathrm{km}$ 的高度范围分别称为对流层与平流层,根据观测在对流层内大气温度随高度增加呈线性递减,而在平流层的下部即 $z=11\sim20\mathrm{km}$ 的范围内,大气温度几乎不随高度变化,有人称这一层为同温层.假定大气的热传导系数 k 为常数.对(2.7.3b)式积分并利用(2.7.3a)式中的温度和温度直减率条件确定其积分常数,即可获得这两层中温度变化规律是对流层($0\leqslant z\leqslant 11\,000\mathrm{m}$):

$$T=T_0-\beta z\quad(\beta=0.006\,5\mathrm{K/m}). \tag{2.7.4}$$

同温层($11\,000\mathrm{m}<z\leqslant20\,100\mathrm{m}$):

$$T=T_{11}=216.5\mathrm{K}=-56.5^\circ\mathrm{C} \tag{2.7.5}$$

根据上面给出的参数,我们就可以由(2.7.1)和(2.7.2)解出大气中的压强和密度随高度变化规律.

对流层

由(2.7.2)和(2.7.4)式有

$$\frac{\rho}{\rho_0}=\frac{p}{p_0}\frac{T_0}{T}=\frac{p}{p_0\left(1-\frac{\beta}{T_0}z\right)}. \tag{2.7.6}$$

将此式代入(2.7.1),对 z 积分,注意 $z=0$ 时 $p=p_0$,得到

$$\frac{p}{p_0}=\left(1-\frac{\beta}{T_0}z\right)^{\frac{T_0\rho_0g}{\beta p_0}} \tag{2.7.7}$$

将此式代入(2.7.6)可得

$$\frac{\rho}{\rho_0}=\left(1-\frac{\beta}{T_0}z\right)^{\frac{T_0\rho_0g}{\beta p_0}-1}. \tag{2.7.8}$$

将(2.7.3)的参数值代入上式得到

$$\frac{p}{p_0}=\left(1-\frac{z}{44\,300}\right)^{5.256},\quad\frac{\rho}{\rho_0}=\left(1-\frac{z}{44\,300}\right)^{4.256}. \tag{2.7.9}$$

式中 z 的单位是 m. 根据此式算出 $z=11\text{km}$ 时,

$$p_{11}/p_0 = 0.222, \quad \rho_{11}/\rho_0 = 0.297. \tag{2.7.10}$$

同温层

将(2.7.5)代入(2.7.2),有

$$\rho = \frac{p}{p_{11}}\rho_{11}, \tag{2.7.11}$$

代入(2.7.1),对 z 积分,并注意 $z=11\,000\text{m}$ 时 $p=p_{11}$,有

$$\frac{p}{p_{11}} = \exp\left[-\frac{\rho_{11}}{p_{11}}g(z-11\,000)\right]. \tag{2.7.12}$$

由(2.7.11),$\rho/\rho_{11}=p/p_{11}$,代入具体数值得

$$\frac{p}{p_{11}} = \frac{\rho}{\rho_{11}} = \exp[-(z-11\,000)/6\,340], \tag{2.7.13}$$

式中 z 的单位是 m.

根据以上公式,已经制成了国际标准大气表,表 2.1 中只摘引了部分数据(其中最右一列的 a 是大气中的声速,参看下册第 10.2 节). 我们看到,在 $z=15\text{km}$ 高度,压强 p 约为海平面压强 p_0 的十分之一.

表 2.1 国际标准大气

z(km)	T(K)	p/p_0	ρ/ρ_0	a(m/s)
0	288.0	1.000	1.000	340.3
5	255.5	0.533	0.601	320.5
10	223.0	0.261	0.337	299.4
11	216.5	0.223	0.297	295.0
15	216.5	0.119	0.158	295.0
20	216.5	0.054	0.072	295.0

* 2.8 大气稳定度

由(2.7.1)式我们知道,在平衡时大气的压强 p 只随高度 z 而变. 在第 2.3 节末我们还提到,平衡时密度 ρ 也只随 z 而变. 根据状态方程(2.7.2),这就要求温度 T 也只随 z 而变,在水平层中保持常数. 但实际上,同一高度的大气层中也常有温度差异,这就会破坏大气的平衡,引起竖直方向的运动. 假定大气中某一体积为 V 的气团的温度 T' 高于周围同一高度上大气的温度 T,那么,由于同一高度上压强 p 相同,根据(2.7.1)必有气团的密度 ρ' 小于同高度周围大气的密度 ρ,从而气团所受的浮力 $F_B=\rho gV$ 大于气团的重量 $W=\rho' gV$,气团会上升.

如果它上升一小段高度后有返回原高度的趋势,我们就说它是稳定的;如果它上升一小段高度后仍有继续上升的趋势就说它是不稳定的. 对于下降的气团也有类似的分析. 大气中某一高度上的气团在竖直方向上相对稳定的程度叫做大气静力稳定度,简称大气稳定度.

气团上升时,由于压强 p 随高度上升而递减,它的密度 ρ' 和温度 T' 也会相应变化. 它是否趋于返回原高度取决于新高度上 ρ' 与周围密度 ρ 的相对大小. 一般认为,气团运动时间很短,高度范围变化不大时,气团来不及与周围大气交换热量,可以把气团的运动当作绝热过程,即

$$p = c\rho'^{\gamma}, \tag{2.8.1}$$

这里 c 是常数,$\gamma \approx 1.4$,是空气的绝热指数. 结合状态方程(2.7.2)可得气团温度 T' 随 p 的变化

$$T' = \frac{p}{\rho' R} = p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} / (c^{-\frac{1}{\gamma}} R). \tag{2.8.2}$$

此式两端取对数微分可得

$$\frac{1}{T'}\frac{\mathrm{d}T'}{\mathrm{d}z} = \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}.$$

将(2.7.1)代入上式,并利用状态方程,得到竖直绝热运动的气团温度随高度的变化率为

$$r_{\mathrm{d}} = -\frac{\mathrm{d}T'}{\mathrm{d}z} = \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{g}{R} = 9.77 \times 10^{-3}\mathrm{K/m}. \tag{2.8.3}$$

r_{d} 在气象学上叫绝热温度直减率. 我们看到,气团每绝热上升约 100m,其温度降低 1K.

记气团在浮力与重力作用下的上升加速度为 a,则有

$$a = \frac{F_{\mathrm{B}} - W}{\rho' V} = \frac{\rho g V - \rho' g V}{\rho' V} = \frac{\rho - \rho'}{\rho'} g.$$

注意 $p = \rho' R T' = \rho R T$,可将上式改写为

$$a = \frac{T' - T}{T} g. \tag{2.8.4}$$

此式指出,如果在某一高度上 $T' > T$,加速度为正值,气团趋于上升;如果 $T' < T$,加速度为负值,气团趋于下降;如果 $T' = T$,加速度等于零,气团与周围大气平衡;当 T' 与 T 相差越大时,竖直加速度就越大.

这样我们看到,如果气团上升过程中,T' 降得比 T 快,到了某一高度 T' 变得低于 T,那么气团就会趋于下降返回原高度. 反之,如果上升过程中,T' 降得比 T 慢,那么 T' 总保持高于 T,气团也就总是趋于继续上升. 因此,如果静止大气中的温度分布是

$$T = T_0 - \beta z \quad (\beta > 0) \tag{2.8.5}$$

的话,我们可以得到结论:

当 $\beta > r_d$ 时,大气层是不稳定的;

当 $\beta < r_d$ 时,大气层是稳定的.

换句话说,如果每升高 100m 时温降超过约 1K,大气层是不稳定的;如果每升高 100m 时温降小于约 1K,大气层是稳定的.

在实际计算大气稳定度时,必须考虑大气中含有水份的影响,这方面可参看有关的气象学或大气热力学书籍(例如参考书[30]).

小　结

在这一章中我们介绍了流体静力学的基本概念. 流体的平衡包括流体在惯性系中静止或均匀地做匀速直线流动,也包括在某一非惯性系中处于相对静止. 平衡流体的最大特点是不能承受切应力,其应力张量可以用单一标量压强来表示.

(2.2.3)式是对任意平衡流体成立的基本方程. 它的推导虽然很简单,但所用的方法(分析某一微元体积的受力)却对于今后分析更复杂的流体力学问题都具有普遍意义,必须好好掌握. 读者还应该善于从这一方程出发,分析均质流体、正压流体和斜压流体平衡时体力所应满足的条件,研究不同体力作用下的流体分界面形状.

流体静力学的核心问题是计算全部或部分浸没在流体中物体所受的压强合力. 读者应该熟练掌握计算平壁和曲壁受力的方法,特别是会正确指出压力体,对于有自由面的流体要会判断什么时候需要考虑自由面以上的大气压、什么时候不需考虑. 由于水是一种应用最为广泛的均质流体,读者应该记住水的密度 $\rho = 1\,000\mathrm{kg/m^3}$. 流体静力学计算在工程上具有极强的实践性,读者务必注意单位换算(例如压强的法定单位是帕,但工程上有时还用大气压,毫米水银柱,毫米水柱等),分清绝对压强与表压,力求数值准确无误.

本章讲的流体静力学规律、帕斯卡原理和阿基米德定律都有重要的应用. 最后两节以大气作为非均质流体的实例也在气象学和航空、宇航上有实用意义. 此外,本章的理论还可以推广到在自身引力作用下的流体,在天体物理学上用来研究星球的形状,有兴趣的读者可以参看有关专业书籍.

*实验中的发现

(二) 大气的压强

1630 年意大利业余科学家 G. G. B. 贝利安尼(1582—1666)发现一根虹吸管跨过 11m 的高山即不再工作,佛罗伦萨市的掘井工人也观察到抽水泵中的水柱高度总超不过 10m 左右. 这些现象使 G. 伽利略(1564—1642)感到困惑,并给予错误的解释. 1640 年 G. 伯蒂试图做一个实验证明抽水泵中的水柱高度可以超过 10m,但未获成功;也许是贝利安尼希望了解 E. 托里拆里(1608—1647)对这些现象的意见,1643 年托里拆里与 V. 维维安尼(1622—1703)重复贝利安尼与伯蒂的实验,但不用水而用重量递增的液体如海水、蜜液和水银等. 这样他们用较短的玻璃管就可以进行实验了. 具体的作法是用一根下端封闭的玻璃管. 从上端注入水银,直至上边缘处,用一手指封闭顶端,将玻璃管倒置,并浸入一盛有水银的容器中,当移去手指后,管内的水银柱即下降,直至距容器水银面约 30 英寸处. 托里拆里设想这也许是由于玻璃管内的水银柱被自由水银面上的大气压强平衡住了. 但这仅是一个假想,没有实验证实他就去世了.

B. 帕斯卡(1623—1662)从 M. 默森(1588—1648)那里知道托里拆里的实验后,开始有些怀疑,又亲自用水和水银重复这一实验,就有些相信托里拆里的设想了. 但深信这一设想还是在完成了下述关键性实验之后.

1648 年 9 月在帕斯卡的指导下,佩里厄具体负责进行这一实验,沿着奥弗涅山脉多姆山的斜坡,从山脚到山顶依次设置若干个观测站,每一站安装一个托里拆里式的水银气压计,所用玻璃管与水银均相同,在每站测量水银柱的高度,结果发现水银柱高度随着观测站高度的增加而递减. 同时,在山脚下还设置了另一气压计,由另一观测者不时记录其水银柱高,发现仅有微小的变化,这充分表明:气压计水银柱高度的变化与沿山高度气压的变化有密切关系,翌日,佩里厄又在克莱蒙最高的塔顶和塔脚重复了他的实验,结论是肯定的,但不够明显,后来,巴斯卡又亲自在巴黎的高层大厦上做过实验.

约在 1659 年,R. 波义耳(1627—1691)用实验证明:气压计中水银柱的高度取决于外部压强,他将一个一端封闭的玻璃管注满水银,倒置于一盛有水银的容器中,然后将它们放在抽气泵的气罐里,让玻璃管的上端穿过气罐盖上的一个孔,并用粘接剂密封这个孔,当抽气泵工作后,水银柱便往下降,每抽一次气,水银面就下降一些,但它不能降到与容器中的水银面同高,总是要高出一英寸左右,波义耳认为这是由于有空气漏入引起的. 他还发现把更多的空气压入气罐时,水银柱高度将大大超过通常的 27 英寸左右,如果把这部分空气放掉,它又会

恢复到原来的高度. 根据这些结果,波义耳确信,一个封密管子中的水银柱之所以处于一定高度是由于水银柱的压强要与外部空气的压强保持平衡的缘故.

习　题

*2.1　均质流体体积为 τ,处于平衡状态,其体力指向一固定的中心且与质点离开该中心距离成正比. 求自由面的形状. 如 $\tau=1\,000\text{m}^3$,且在距离为 1cm 时对 1g 质量的吸引力为 10^{-5}N,如流体为水,试计算中心点的压强.

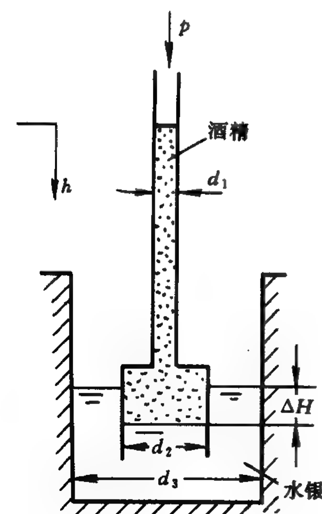
*2.2　给出如下体力场,分别在(a)均质或正压流体(b)斜压流体情况下说明流场能否静止:

(1) $\boldsymbol{f}=(y^2+yz+z^2)\boldsymbol{i}+(z^2+zx+x^2)\boldsymbol{j}+(x^2+xy+y^2)\boldsymbol{k}$;

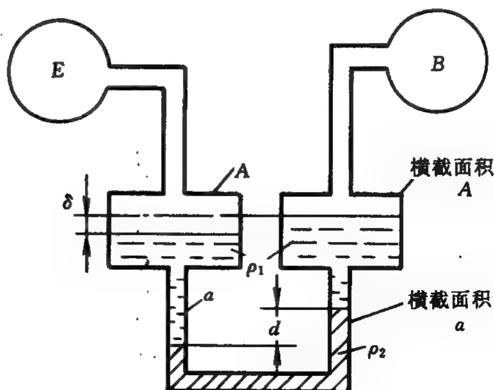
(2) $\boldsymbol{f}=-\dfrac{K}{r^3}\boldsymbol{r}$, K 为常数, $\boldsymbol{r}$ 是向径.

*2.3　图示一种酒精和水银的双液测压计,细管上端为大气压时酒精液面高度为零. 当细管上端的表压为 p 时,酒精的液面下降 h. 试用 d_1,d_2,d_3 和 h 来表示 p. 酒精和水银密度均为已知.

2.4　如图的微测压计用来测量两容器 E 和 B 中的气体压强差. 试用 δ,d,ρ_1,ρ_2 表示 p_E-p_B,并说明当横截面积 $a\ll A$,而且两种液体密度 ρ_1 和 ρ_2 相近时,很小的 p_E-p_B 就能引起很大的液面高差 d,从而提高了测量精度.



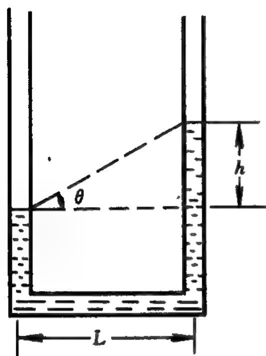
2.3 题图



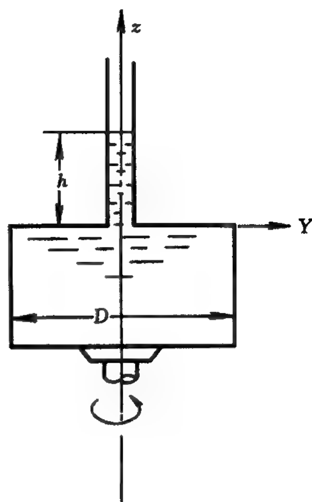
2.4 题图

*2.5　图为装在做水平匀加速运动物体上的U形管式加速度测器,已测得两管中液面差

$h=4\text{cm}$,两管相距 $L=20\text{cm}$,求该物体加速度的大小和方向.



2.5 题图

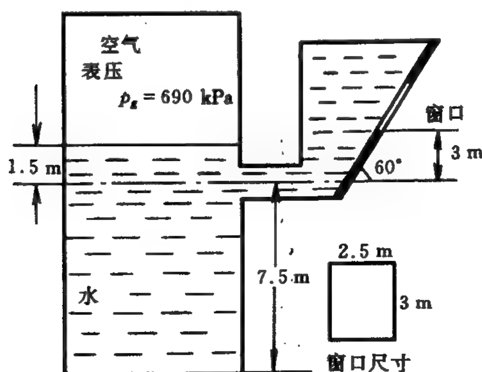


2.6 题图

*2.6　如图一圆柱形容器,其顶盖中心装有一敞口的测压器,容器装满水. 测压管中的水面比顶盖高 h,圆柱形容器直径为 D. 当它绕其竖直轴以角速度 Ω 旋转时,顶盖受到多大的液体向上总压力?

2.7　一个充满水的密闭容器,以等角速度 Ω 绕一水平轴旋转. 试证明它的等压面为圆柱面,且该圆柱面的轴线平行于转动轴,并比转动轴高 g/Ω^2.

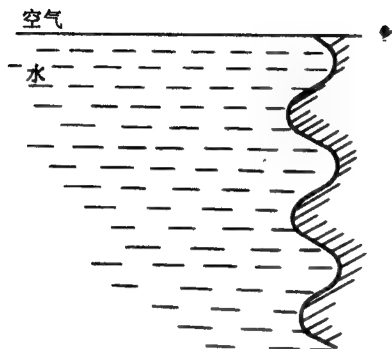
2.8　试求图中窗口所受内外流体作用力合力的大小和位置,窗口外为大气.



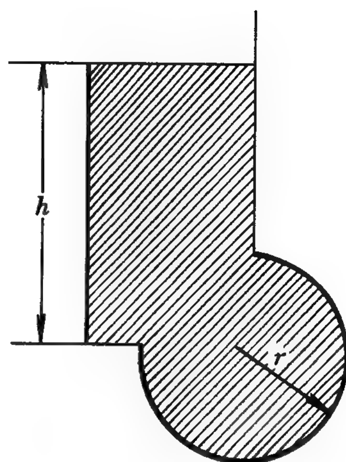
2.8 题图

*2.9　如图所示波纹形壁面,波纹为半圆形,半径为 2.5cm,试求由水平面向下前 n 个波

纹壁面所受到空气和水的水平与竖直合力的大小．又问水面下 1 m 和 1.15 m 两个深度之间的壁面受到空气与水的水平和竖直合力的大小、方向如何？（壁面在垂直书面方向取单位宽度．）



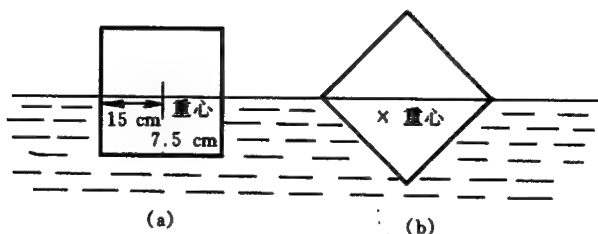
2.9 题图



2.10 题图

2.10　曲面形状为 3/4 个圆柱，半径为 $r=0.8$ m，宽度为 1 m，其中心线沿水平方向，位于水面下 $h=2.4$ m 深处，求曲面所受液体总压力．

*2.11　一正方形木块，边长为 30 cm，其重心位置如图(a)所示，并有一半浸入水中，当木块被转动 45°角时，如图(b)所示，试求木块的恢复力矩．

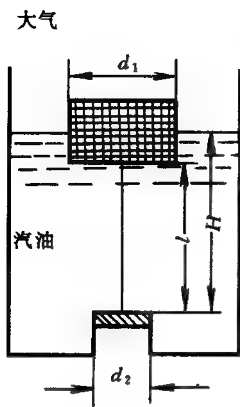


2.11 题图

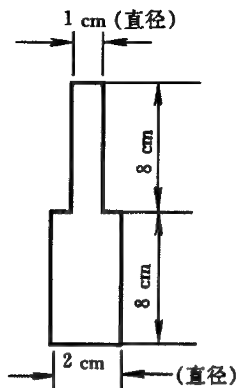
2.12　如图直径 $d_1=8$ cm 的圆柱形浮子用一长 $l=12$ cm 的绳子系在直径 $d_2=4$ cm 的圆阀上．已知浮子和圆阀的总质量 $M=0.1$ kg．液体是汽油，密度 $\rho=0.74$ g/cm^3．求汽油液面 H 达到什么高度时，圆阀会自动打开？

*2.13　一液体比重计的外形如图所示，质量为 35g．求此液体比重计的测量范围（提示：液面必须在细管范围）．

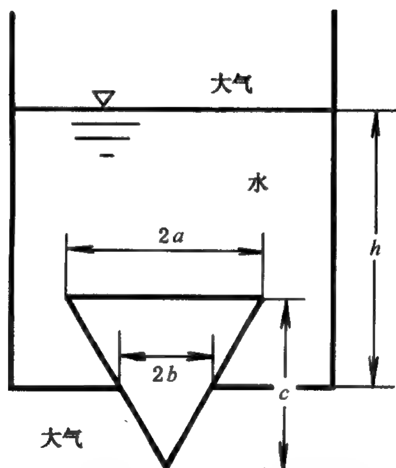
2.14　求图中圆锥形阀门上所受水和大气合力方向，大小和作用线．已知 $a=2$ cm，$b=1$ cm，$c=3$ cm，$h=0.3$ m，大气压 $p_0=1.013\times10^5$ Pa.



2.12 题图



2.13 题图



2.14 题图

2.15　在绝热的大气中，$p/\rho^\gamma=$常数，式中 γ 为常数. 试求证大气压强 p 随高度 z 的变化规律是

$$p=\frac{1-\gamma}{\gamma}\rho gz+p_0\frac{\rho}{\rho_0}.$$

式中 p_0 和 ρ_0 是海平面($z=0$)上的压强和密度.

*2.16　海洋记录研究室位于海平面下 10 千米深度. 在此种深度下海水的压缩性非常重要，故可将体积弹性模量 $E_v=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho/\rho}=2.42\times10^9\,\mathrm{Pa}$ 当作常数而算出此处的密度和压强. 试将此结果与将海水当作均质流体而算出的密度及压强对比，以百分比表示两种算法的差异. 设海平面上的海水比重为 1.25.

第三章　流体运动的基本方程组

本章介绍流体运动时所应遵循的基本定律及其数学表达式，也就是流体运动的基本方程组.

当从理论上解决实际流体力学问题时，首先是在认识现象的基础上，提出理论模型，即运用基本物理定律和假设，建立方程组，并尽可能作出合理简化，然后根据所提出的问题确立初始条件及边界条件，求解方程组，最后解出各物理量的变化规律并尽可能与实验结果进行比较. 由此看出，建立完整的流体力学基本方程组，是从理论上解决实际问题的第一步，也是流体力学理论的核心和关键.

流体运动所应遵循的物理定律，是建立流体运动基本方程组的依据. 这些定律应该是最基本的，互不矛盾，包含所有有关制约该流体运动的物理关系. 这些基本物理定律主要包括质量守恒、动量平衡、动量矩平衡、能量守恒(热力学第一定律)、热力学第二定律，加上状态方程、本构方程(第一章已介绍).

在流体力学中这些物理定律都以数学方程形式表达出来，其数学表达形式可以是微分形式的，也可以是积分形式的. 它们应该是一组封闭的方程组，在给定的边界条件及初始条件下，存在适定解.

为使建立基本方程组方便，3.1 节引入系统与控制体的概念，3.2 节推导雷诺输运定理. 3.3 节对建立基本方程组的基本定律及数学表达形式作一般讨论. 3.4～3.6 节用流体力学中惯用的、特殊的微六面体(控制体)建立微分形式的连续性方程、运动方程和能量方程. 3.7 节用一般方法建立积分形式和微分形式的流体力学基本方程组. 3.8 节介绍状态方程，3.9 节介绍解基本方程组所用的初始条件及边界条件，最后，3.10 节介绍流体力学中常用的主要基本理论模型，它们是流体力学基本理论展开的一个线索和说明.

3.1　系统与控制体

(一) 系统

在流体力学中，系统是指某一确定流体质点集合的总体. 系统以外的环境

称为外界．分隔系统与外界的界面，称为系统的边界．系统通常是研究的对象，外界则用来区别于系统．系统的特点是：

(1) 系统将随系统内质点一起运动，系统内的质点始终包含在系统内，系统边界的形状和所围空间的大小，则可随运动而变化；

(2) 系统与外界无质量的交换，但可以有力的相互作用，及能量（热和功）交换．

如果我们的研究对象是系统，由于力学中的一些基本定律是建立在质点、质点系上的．因此，流体力学这些力学定律可直接用原始数学形式表达出来．依第一章所述的描述流体运动的方法，这相应于拉格朗日的描述．

但是在流体力学的多数问题中，把系统作为研究对象得出来的基本方程，应用起来并不方便，而往往更感兴趣的是，要知道流体物理量的分布，这就需要欧拉描述，因此，相应必须引进控制体的概念．

(二) 控制体

控制体是指在流体所在的空间中，以假想或真实流体边界包围，固定不动形状任意的空间体积(可运动、变形的控制体不作介绍)．包围这个空间体积的边界面，称为控制面．

控制体的特点是：

(1) 控制体的形状与大小不变，并相对于某坐标系固定不动．控制体内的流体质点组成并非不变的．

(2) 控制体既可通过控制面与外界有质量和能量交换，也可与控制体外的环境有力的相互作用．

显然，力学定律要适用于控制体，必须对力学定律中所用系统物理量的体积分对时间的导数，作一改写，使之能用控制体的积分表达出来．由于控制体是以空间变量描述，因此，其相应描述方法是欧拉的．

3.2 雷诺输运定理

设在某时刻的流场中，单位体积流体的物理量分布函数值为 $f(\boldsymbol{r},t)$，则 t 时刻在流体域 τ 上的流体，有总物理量 I

$$I = \int_{\tau} f(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}\tau. \tag{3.2.1}$$

例如，当 f 为单位体积流体的质量即密度分布函数 $\rho(\boldsymbol{r},t)$ 时，流体域 τ 上的总物理量即为总流体质量 M

$$M = \int_{\tau} \rho(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}\tau.$$

当 f 为单位体积流体的动量分布函数 $\rho\boldsymbol{v}$ 时，流体域 τ 上的总物理量即为总动量 $\boldsymbol{K}$

$$\boldsymbol{K}=\int_{\tau}\rho\boldsymbol{v}\mathrm{d}\tau.$$

当 f 为单位体积流体的动能分布时，流体域 τ 上的总动能 k

$$k=\int_{\tau}\frac{1}{2}\rho v^{2}\mathrm{d}\tau.$$

一般来说，体积分(3.2.1)中的积分域是可变的，即在 t 时刻积分域是 τ 这个区域，以后则占有另一个区域，而且其大小、形状都可能发生改变. 很显然，体积分(3.2.1)是时间 t 的函数 $I(t)$：

$$I(t)=\int_{\tau(t)}f(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}\tau \tag{3.2.2}$$

在本章中，常常要用到体积分(积分域上系统总物理量)随时间的变化率. 设 t 时刻在流体中取一体积 $\tau(t)$，其周界面为 $S(t)$，周界面外法线单位矢量为 $\boldsymbol{n}$，速度为 $\boldsymbol{v}$. 现计算 $I(t)$ 的时间变化率：

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}I(t)=\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{\tau(t)}f(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}\tau \tag{3.2.3}$$

为此，对上式作如下考虑.

设 t 时刻体积在空间位置 $\tau(t)$ 上，$t+\Delta t$ 时刻该体积到达另一位置 $\tau(t+\Delta t)$，如图 3.1 所示. 根据时间导数的定义，(3.2.3)式为

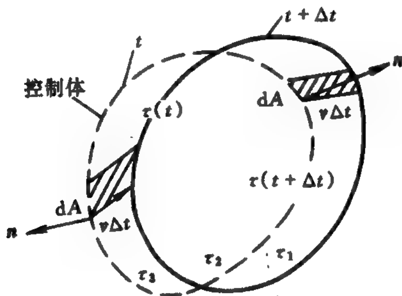


图 3.1　可变体积上积分的时间导数

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}I(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{I(t+\Delta t)-I(t)}{\Delta t}. \tag{3.2.4}$$

式中 $I(t)$ 由(3.2.2)表示，而 $I(t+\Delta t)$ 表示为

$$I(t+\Delta t)=\int_{\tau(t+\Delta t)}f(\boldsymbol{r},t+\Delta t)\mathrm{d}\tau$$

现将 $\tau(t+\Delta t)$ 分两部分(图 3.1)，即与 $\tau(t)$ 重合部分 τ_2 及 $\tau(t)$ 新占有区

域部分为 τ_1，又设从 $\tau(t)$空出区域部分 τ_3，因而有

$$\begin{aligned}\tau(t+\Delta t) &= \tau_1 + \tau_2 \\ &= \tau_1 + (\tau_2 + \tau_3) - \tau_3 \\ &= \tau_1 + \tau - \tau_3,\end{aligned}$$

其中 $\tau_2 + \tau_3$ 即为体积 τ，于是体积分相应为

$$I(t+\Delta t) = I_{\tau_1}(t+\Delta t) + I_\tau(t+\Delta t) - I_{\tau_3}(t+\Delta t). \tag{3.2.5}$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}I(t) &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{I(t+\Delta t)-I(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{I_{\tau_1}(t+\Delta t)+I_\tau(t+\Delta t)-I_{\tau_3}(t+\Delta t)-I_\tau(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{I_\tau(t+\Delta t)-I_\tau(t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{I_{\tau_1}(t+\Delta t)}{\Delta t} - \lim_{\Delta t\to 0}\frac{I_{\tau_3}(t+\Delta t)}{\Delta t}\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

现分别计算上式右端三个极限. 为了计算第一个极限，注意到 $I_\tau(t+\Delta t)$ 及 $I_\tau(t)$是同一空间域 τ 上不同时刻的积分，因此

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{I_\tau(t+\Delta t)-I_\tau(t)}{\Delta t} = \frac{\partial}{\partial t}I_\tau = \frac{\partial}{\partial t}\int_\tau f(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}\tau \tag{3.2.7}$$

对第二个极限，注意到体积分

$$I_{\tau_1}(t+\Delta t) = \int_{\tau_1} f(\boldsymbol{r},t+\Delta t)\mathrm{d}\tau$$

中的积分元 $\mathrm{d}\tau$ 可取为如图 3.1 所示的 τ_1 中的柱形体元，其底面积为空间域 τ 的边界上的面元 $\mathrm{d}A$，棱边长为$|\boldsymbol{v}\Delta t|$(这里 $\boldsymbol{v}$ 为流体质点相对于面元 $\mathrm{d}A$ 的速度矢量). 因 τ 的边界上的外法向单位矢量为 $\boldsymbol{n}$，则体积元

$$\mathrm{d}\tau = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}A\Delta t, \tag{3.2.8}$$

这可理解为 Δt 时间内由面元 $\mathrm{d}A$ 移动所产生的体积变化，于是第二个极限为

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{I_{\tau_1}(t+\Delta t)}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\int_{\tau_1} f(\boldsymbol{r},t+\Delta t)\mathrm{d}\tau}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\int_{S_1} f(\boldsymbol{r},t+\Delta t)\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}A\Delta t}{\Delta t} \\ &= \int_{S_1} f(\boldsymbol{r},t)\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}A,\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

其中 S_1 为 τ_1 与 τ 之公共表面，上式右端表示单位时间内从 τ 的表面 S_1 上移出的物理量.

同理,对第三个极限,注意到其体积分中的体积元

$$d\tau = - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} dA \Delta t, \tag{3.2.10}$$

其中各项意义与前相同,而取负号是由于在 τ_3 中 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 夹角为钝角,为使 $d\tau > 0$,便取 $-\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}$. 因此,第三个极限为

$$-\lim_{\Delta t \to 0} \frac{I_{\tau_3}(t+\Delta t)}{\Delta t} = \int_{S_2} f(\boldsymbol{r},t)\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} dA, \tag{3.2.11}$$

其中 S_2 为 τ_3 与 τ 之公共表面,上式右端表示单位时间内从 τ 的表面 S_2 移入的物理量.

S_1、S_2 组成 τ 的全部边界 S. 这样,式(3.2.6)的第二和第三个极限就合并写为

$$\begin{aligned} &\int_{S_1} f(\boldsymbol{r},t)\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} dA + \int_{S_2} f(\boldsymbol{r},t)\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} dA \\ =&\int_{S_1+S_2} f(\boldsymbol{r},t)\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} dA \\ =&\oint_S f(\boldsymbol{r},t)\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} dA. \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

上式右端表示时刻 t 在单位时间内从 τ 的表面 S 净向外输运的物理量.

将式(3.2.7)、(3.2.12)一起代入(3.2.6)式得

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} I(t) &= \frac{D}{Dt} \int_{\tau(t)} f(\boldsymbol{r},t) d\tau \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} f(\boldsymbol{r},t) d\tau + \oint_S f(\boldsymbol{r},t)\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} dA. \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

上式表明,某时刻一可变体积上系统总物理量的时间变化率,等于该时刻所在空间域(控制体)中物理量的时间变化率与单位时间通过该空间域边界净输运的流体物理量之和. 常常称此为雷诺输运定理.

对于这一定理注意下面几点是非常重要的.

(1) 在推导(3.2.13)式中,若 $\tau^*(t)$ 为任一流体体积,$S^*(t)$ 为其周界面,周界面速度为 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)$,外法线单位矢量为 $\boldsymbol{n}$,则以同样的推导可得

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau^*(t)} f(\boldsymbol{r},t) d\tau^* = \int_{\tau^*(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(\boldsymbol{r},t) d\tau^* + \oint_{S^*(t)} f(\boldsymbol{r},t)\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} dA^*$$

而且,特别当 S^* 为物质面时上式即为(3.2.13)式.

(2) 若将控制体从固定不动体积,推广到是可运动、可变形体积时,上式即可用于各类固定的、运动的、不可变形、可变形的控制体,流动也可以是三维的、三向的或非定常的.

(3) 在推导方程(3.2.13)时,系统在一指定的流场中运动,这样,在某一时刻,系统体积的流动物理量的总时间变化率(即方程的左边项)必须相对于随控

制体一起运动的观察者进行计算.

(4) 如果控制体是运动的和变形的,计算方程右边第一项时应注意,这时控制体,随之其积分上、下限都是依赖于时间的,当然,被积函数 $f(\boldsymbol{r},t)$ 也有可能是依赖于时间的. 这样,必须先计算积分,再进行微分。

(5) 如果控制体是固定的和不变形的. 则右边第一项对控制体的积分不再依赖于时间,即与微分和积分的顺序无关,即右边第一项可写为 $\frac{\partial}{\partial t}\int_\tau f(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}\tau$ 也可写为 $\int_\tau \frac{\partial}{\partial t}f(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}\tau$.

(6) 如果控制体以常速度运动但不变形,由于常速度对净的输运物理量没有贡献,故可用相对速度或绝对速度.

(7) 右边第二项代表单位时间通过控制体表面的流体净输运物理量,式中的速度 $\boldsymbol{v}$ 应为流体质点相对于控制体表面的速度.

3.3 基本方程组的一般论述

流体力学基本方程组是将流体运动时所应遵循的物理定律,用方程形式表达出来,其目的是从这些方程中解出流动的未知量. 因此这里就有应遵循的定律有哪些和用怎样的形式表达的问题.

(一) 描述流体运动的基本定律

一般来说,在流体力学的范围内,流体运动必须遵循的定律有:

1. 质量守恒律,
2. 动量平衡律,
3. 动量矩平衡律,
4. 能量守恒律(热力学第一定律),
5. 熵不等式(热力学第二定律).

很明显,这五个定律是制约流体运动最基本的物理定律. 其中前三个是力学的,后两个是热力学的. 由于流体运动常常有热过程参与,述及到热力学量,这就要用到后两个定律. 此外,为了能从这些定律组成的方程组中解出未知量,还要补充其它方程,这就是本构方程、状态方程,它们都是有关物性方面的重要方程. 本构方程已在第一章中介绍,本章不再重复. 状态方程将在后面介绍.

对具体的流体运动,不一定需要应用所有的定律,例如,对不可压缩流体无热效应的流动,前两个定律即已完全满足.

(二) 数学表达形式

对上述定律用方程表达时,尚需考虑以下几点.

1. 拉格朗日和欧拉自变量的选择

凡取拉格朗日变量为自变量的方程形成拉格朗日型的流体力学基本方程组;凡取欧拉变量为自变量的方程形成欧拉型的流体力学基本方程组. 实际上究竟用哪一种,应视具体问题预定,如侧重于研究质点运动的,适用前者;侧重于研究量的分布的,适用后者. 由于流体力学中的大多数问题是想获得各物理量的分布,故常常多采用欧拉型.

2. 积分形式及微分形式的选择

所谓积分形式或微分形式,是指基本运动定律的数学表达式,是以积分形式还是以微分形式出现.

积分形式需对流体取有限体积,运用基本定律经积分得到;微分形式则可对流体取体积元,运用基本定律直接得到,也可对流体取有限体积,运用基本定律经积分后,再利用积分域的任意性而得到.

积分形式及微分形式各有优缺点,积分形式在求总体性量(如求作用于某一面上的压强合力)时较简单,但它不能获得物理量的局部分布(如压强分布函数),需要求量的分布时,要用微分形式. 此外,用积分形式可容许量在域中不连续,而微分形式则不允许.

3.4　微分形式的连续性方程

质量守恒律是流体运动所应遵循的基本定律之一,它的含义是包含在一流体系统中的流体质量在运动过程中保持不变. 另一种说法是,在一固定空间中的流体质量的减少率等于在此期间通过其表面的质量通量. 前者指对系统,后者指对控制体. 将此定律作数学表达即为连续性方程.

以下用一个微六面体元控制体建立微分形式的连续性方程,这种方法在建立微分形式的流体力学方程组时常常采用,意义清晰.

设在流场中取一固定不动的微平行六面体(控制体),在直角坐标系 $Oxyz$ 中,边长取为 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z$(图 3.2).

流体运动时,流体将流入、流出该控制体,并使控制体中的流体质量产生变化. 下面来计算这些流入流出量及控制体中质量的变化,并依据质量守恒律,建立连续性方程.

设 t 时刻 A 点流体密度为 $\rho(x,y,z,t)$,速度为 $\boldsymbol{v}(x,y,z,t)$,其分量是 u、v、w.

考虑六面体元每个面元上质量的流入或流出,由于每个面只与一个坐标轴

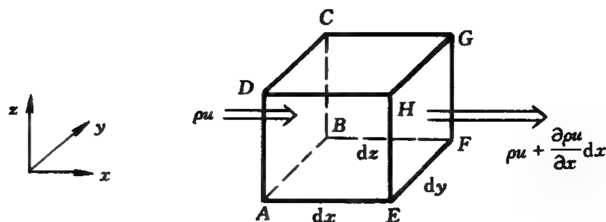


图 3.2 微六面体元

垂直,故每个面上只有一个速度分量使相应的质量流入或流出该六面体. 先计算与 x 轴相垂直的两个面上的质量流量.

在 $ABCD$ 面上,Δt 时间将有

$$\rho u \mathrm{d}y\mathrm{d}z\Delta t$$

的流体质量进入六面体,而在 $EFGH$ 面上,Δt 时间内则将有

$$\rho u \mathrm{d}y\mathrm{d}z\Delta t + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u \mathrm{d}y\mathrm{d}z\Delta t)\mathrm{d}x$$

的流体质量流出该六面体. 这样,通过这两个面,Δt 时间内就有

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}x\Delta t \tag{3.4.1}$$

的流体质量(净)流出该六面体. 同理可计算出 Δt 时间内,通过 $DAEH$ 及 $BFGC$ 这两个面净流出的流体质量为

$$\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)\mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Delta t. \tag{3.4.2}$$

通过 $AEFB$ 及 $DHGC$ 这两个面净流出的流体质量为

$$\frac{\partial}{\partial z}(\rho w)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\Delta t. \tag{3.4.3}$$

这样,Δt 时间内通过六面体的全部六个面净流出的质量就为

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\Delta t. \tag{3.4.4}$$

与此同时,此六面体内的质量将发生变化,因 t 时刻,在六面体内的流体质量为

$$\rho \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

故经过 Δt 时间,即在 $t+\Delta t$ 时刻,六面体内的质量将是

$$\rho \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z)\Delta t.$$

在 Δt 时间内,六面体内的质量增加了

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\Delta t$$

或减少了

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\Delta t. \tag{3.4.5}$$

于是,依据质量守恒定律,Δt 时间内,六面体内所减少的质量一定与同一时间内从六面体中流出的质量相等:

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\Delta t = \left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w)\right]\cdot \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\Delta t,$$

约去等式两端的 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\Delta t$,就有

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0. \tag{3.4.6}$$

这就是直角坐标系中流体运动的微分形式的连续性方程. 上式第一项代表单位时间内,单位体积的质量增量,第二、三、四项代表单位时间内、单位体积内质量的净流出.

利用散度公式:

$$\mathrm{div}\,(\rho \boldsymbol{v}) = \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w), \tag{3.4.7}$$

(3.4.6)式可改写为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho \boldsymbol{v}) = 0. \tag{3.4.8}$$

再由

$$\mathrm{div}\,(\rho \boldsymbol{v}) = \rho \mathrm{div}\,\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\rho$$

及

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\rho,$$

式(3.4.8)也可写为

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0. \tag{3.4.9}$$

考虑几种特殊情况,

(1) 对定常运动,$\frac{\partial}{\partial t}=0$,连续性方程为

$$\mathrm{div}\,(\rho \boldsymbol{v}) = 0. \tag{3.4.10}$$

这表示从单位体积内净流出的质量为零(质量的流入与流出相等).

(2) 对不可压缩流体,由于流体的密度在运动过程中保持不变,故应有

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = 0. \tag{3.4.11}$$

这时连续性方程为

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0. \tag{3.4.12}$$

这表明,流体不可压缩时,体积不膨胀不收缩.

以下是几个建立流体连续性方程的例子. 注意根据具体情况(流动特征),首先选择好控制体,然后选择好流动参数,再计算控制面的质量流入流出及控制体内质量增加,利用质量守衡,建立连续性方程. 这些方程不是(3.4.8)、(3.4.9)的形式,但它们在具体问题中是方便适用的.

例 3.1 流体在弯曲的变截面细管中流动,写出它的连续性方程.

解 因管细,设管截面上物理量为均匀的(若不均匀,有时取截面平均值). 截面位置用管轴坐标 s 来表示,截面积用 A 表示,设 A 是 s 的函数 $A=A(s)$,沿轴线方向的管流速用 q 表示,它是 s 及 t 的函数,密度用 ρ 表示,它也是 s 及 t 的函数.
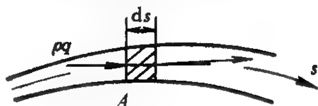


图 3.3

为建立连续性方程,取一管微元(控制体),其长度为 ds,管微元体积为 Ads.

因管微元控制面由侧面及两底面组成,经侧面无流体通过. 单位时间流入控制体的流体质量为 ρqA,流出则为

$$\rho qA + \frac{\partial}{\partial s}(\rho qA)ds,$$

故单位时间从控制体净流出的流体为

$$\frac{\partial}{\partial s}(\rho qA)ds.$$

又单位时间控制体内质量减少为

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\rho qA)ds,$$

上两项应相等,故

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t}Ads = \frac{\partial}{\partial s}(\rho qA)ds.$$

简化后得

$$A\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}(\rho qA) = 0.$$

这就是沿变截面细管流动的连续性方程.

由此,当管等截面时,连续性方程为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho q)}{\partial s} = 0.$$

当密度为常数时,连续性方程为

$$\frac{\partial}{\partial s}(qA) = 0,$$

或

$$qA = 常数(沿管轴),$$

即单位时间的体积流量沿管轴不变. 上式中若再加上 A 为常数(等截面),则有

$$q = 常数(沿管轴),$$

即沿管轴流速不变.

例 3.2　沿变深度矩形截面河道水面上有波动运动,求此波动应满足的连续性方程.

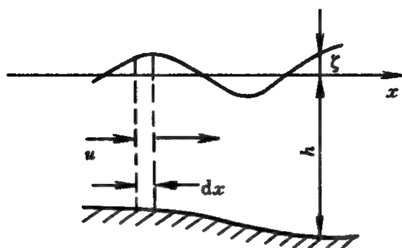


图 3.4

解　设 x 轴取在河道方向静止水面上,自静止水面算起的深度为 $h(x)$,自由表面离静止水面为 $\zeta(x,t)$,河截面平均水流速度为 $u(x,t)$,河宽 b 不变,水密度为常数 ρ.

取一长为 $\mathrm{d}x$ 的控制体,如图所示,控制体体积为 $(h+\zeta)b\mathrm{d}x$,设从控制体左侧面单位时间流入质量为 $\rho(h+\zeta)bu$,则从右侧面单位时间流出质量为

$$\rho(h+\zeta)bu+\frac{\partial}{\partial x}(\rho(h+\zeta)bu)\mathrm{d}x,$$

于是,单位时间自控制体净流出质量为

$$\rho b\frac{\partial}{\partial x}[(h+\zeta)u]\mathrm{d}x.$$

又,单位时间控制体质量减少为

$$-\frac{\partial}{\partial t}[\rho(h+\zeta)b\mathrm{d}x],$$

由质量守恒,

$$-\rho b\frac{\partial}{\partial t}[(h+\zeta)]\mathrm{d}x=\rho b\frac{\partial}{\partial x}[(h+\zeta)u]\mathrm{d}x.$$

两端约去相同因子 $\rho b\mathrm{d}x$,又 h 不随 t 变,故连续性方程为

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}[(h+\zeta)u]=0.$$

若 $\zeta\ll h$,则上式可近似为

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{\partial(hu)}{\partial x}=0.$$

例 3.3　某瞬时水流通过具有自由面的蓄水通道(见图 3.5),已知通道截面

积 $A_1=0.1\text{m}^2$, $A_2=0.1\text{m}^2$, 自由面截面积 $A_3=0.2\text{m}^2$, A_1、A_2 截面上流动均匀, $v_1=1\text{ m/s}$, $v_2=1.2\text{ m/s}$, 求该瞬时自由水面的变化率.

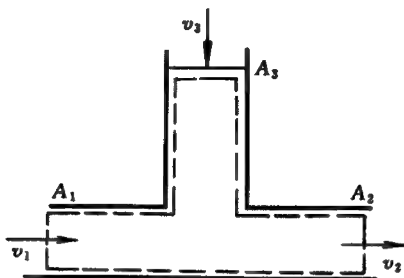


图 3.5

解 取控制体如图虚线所示,设水密度为常数,自由面上的水位变化速度是均匀的,则由质量守恒(当密度为常数时即为体积守恒)得

$$v_2A_2 - v_1A_1 = v_3A_3,$$

其中 v_3 为自由面下降的速度. 代入 v_1、A_1、v_2、A_2 及 A_3 各值,得

$$v_3 = \frac{v_2A_2 - v_1A_1}{A_3} = \frac{0.12-0.1}{0.2} = 0.1\text{ m/s}.$$

例 3.4 试推导拉格朗日型微分形式连续性方程.

解 设一流体系统,有微元体积 $\mathrm{d}\tau$,其密度为 ρ,则微元系统有质量 $\rho\mathrm{d}\tau$,依质量守恒,有

$$\rho\mathrm{d}\tau = \rho_0\mathrm{d}\tau_0,$$

其中 ρ_0、$\mathrm{d}\tau_0$ 为初始 t_0 时,微元系统的密度及体积.

因 t_0 时刻坐标为 x_0, y_0, z_0 的流体质点,在 t 时刻已移至坐标为 x, y, z 的位置,且它们可以质点的拉格朗日变数 a、b、c 表示:

$$\begin{cases} x_0 = x(a,b,c,t_0), \\ y_0 = y(a,b,c,t_0), \\ z_0 = z(a,b,c,t_0), \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x(a,b,c,t), \\ y = y(a,b,c,t), \\ z = z(a,b,c,t). \end{cases}$$

同时依变数变换

$$\mathrm{d}\tau_0 = \mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0\mathrm{d}z_0 = D_0\mathrm{d}a\mathrm{d}b\mathrm{d}c,$$

$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = D_0\mathrm{d}a\mathrm{d}b\mathrm{d}c,$$

其中

$$D_0 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_0}{\partial a} & \frac{\partial y_0}{\partial a} & \frac{\partial z_0}{\partial a} \\ \frac{\partial x_0}{\partial b} & \frac{\partial y_0}{\partial b} & \frac{\partial z_0}{\partial b} \\ \frac{\partial x_0}{\partial c} & \frac{\partial y_0}{\partial c} & \frac{\partial z_0}{\partial c} \end{vmatrix},$$

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial b} \\ \frac{\partial x}{\partial c} & \frac{\partial y}{\partial c} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix}.$$

将 $\mathrm{d}\tau_0$、$\mathrm{d}\tau$ 代入质量守恒等式，得

$$\rho D = \rho_0 D_0,$$

这就是拉格朗日型微分形式连续性方程.

3.5　微分形式的运动方程

动量平衡是流体运动时所应遵循的另一个普遍定律. 它的含义是，对一给定的流体系统，其动量的时间变化率等于作用于其上的外力总和. 其数学表达式即称运动方程.

(一) 运动方程的推导

以下用微六面体元建立微分形式的运动方程.

设在流场中取一固定不动的控制体(微六面体元)，如图 3.2 所示，并取 t 时刻在此控制体体元内的流体为一系统. 设 A 点的密度为 ρ，速度为 $\boldsymbol{v}$，其分量为 u、v、w. 作用于 A 点的单位质量力为 $\boldsymbol{F}$，作用于面元 $ABCD$、$AEHD$、$AEFB$ 上的表面力分别为 $\boldsymbol{P}_{-x}$、$\boldsymbol{P}_{-y}$、$\boldsymbol{P}_{-z}$.

先计算系统之动量变化率. 在时刻 t 到时刻 $t+\Delta t$，微六面体元流体系统将运动到另一位置，其动量也发生变化. 在 Δt 时间内，其动量变化，依本章 3.2 节的公式，将包括两部分，一部分是控制体微六面体内动量的变化，另一部分是经体元控制面迁移的动量. 现分别计算如下：

设 t 时刻控制体内动量为

$$\rho \boldsymbol{v} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z,$$

则在 $t+\Delta t$ 时刻控制体的动量为

$$\rho \boldsymbol{v} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z + \frac{\partial}{\partial t}(\rho \boldsymbol{v} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z)\Delta t,$$

于是单位时间内,控制体内动量变化为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \boldsymbol{v})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

经控制面迁移的动量,可分别对六个面元来计算. 在 $ABCD$ 面上,Δt 时间内流入的动量是

$$\rho u \boldsymbol{v}\mathrm{d}y\mathrm{d}z\Delta t,$$

在 $EFGH$ 面上 Δt 时间内流出的动量为

$$\rho u \boldsymbol{v}\mathrm{d}y\mathrm{d}z\Delta t+\frac{\partial}{\partial x}[\rho u \boldsymbol{v}\mathrm{d}y\mathrm{d}z\Delta t]\mathrm{d}x,$$

于是 Δt 时间内在此两对面上净流出的动量为

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u \boldsymbol{v})\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}x\Delta t.$$

同理,经 $AEHD$、$BFGC$ 两对面净流出动量为

$$\frac{\partial}{\partial y}(\rho v \boldsymbol{v})\mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Delta t.$$

经 $AEFB$、$DHGC$ 两对面净流出的动量为

$$\frac{\partial}{\partial z}(\rho w \boldsymbol{v})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\Delta t.$$

于是单位时间经全部控制面净流出的动量为

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u \boldsymbol{v})+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v \boldsymbol{v})+\frac{\partial}{\partial z}(\rho w \boldsymbol{v})\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=[(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\rho \boldsymbol{v}+\rho \boldsymbol{v}\operatorname{div}\boldsymbol{v}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

因此,微流体系统的动量变化率为

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial(\rho \boldsymbol{v})}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)(\rho \boldsymbol{v})+\rho \boldsymbol{v}\operatorname{div}\boldsymbol{v}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\left[\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\rho \boldsymbol{v})+\rho \boldsymbol{v}\operatorname{div}\boldsymbol{v}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\left[\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}\boldsymbol{v}+\rho\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}+\rho \boldsymbol{v}\operatorname{div}\boldsymbol{v}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\left[\boldsymbol{v}\left(\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}+\rho\operatorname{div}\boldsymbol{v}\right)+\rho\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

应用连续性方程,上式小括号内之值为零. 于是微元流体系统的动量变化率为

$$\rho\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \tag{3.5.1}$$

其次计算作用于微元六面体上的力:质量力及表面力. 设 A 点单位质量上的质量力为 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{b}}$,微元上的质量力就为

$$\rho \boldsymbol{F}_{\mathrm{b}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{3.5.2}$$

最后计算表面力，分别考虑六个面上的应力．见图 3.6，3.7 由于作用于 $ABCD$、$AEHD$、$AEFB$ 面上的应力分别为

$$\boldsymbol{p}_{-x} = -\boldsymbol{p}_x = -(p_{xx}\boldsymbol{i} + p_{xy}\boldsymbol{j} + p_{xz}\boldsymbol{k})$$

$$\boldsymbol{p}_{-y} = -\boldsymbol{p}_y = -(p_{yx}\boldsymbol{i} + p_{yy}\boldsymbol{j} + p_{yz}\boldsymbol{k}),$$

$$\boldsymbol{p}_{-z} = -\boldsymbol{p}_z = -(p_{zx}\boldsymbol{i} + p_{zy}\boldsymbol{j} + p_{zz}\boldsymbol{k})$$

作用于它们的相对面 $EFGH$、$BFGC$、$DHGC$ 上的应力则如图所示，分别为

$$\boldsymbol{p}_x + \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{p}_x \mathrm{d}x = p_{xx}\boldsymbol{i} + p_{xy}\boldsymbol{j} + p_{xz}\boldsymbol{k} + \frac{\partial}{\partial x}(p_{xx}\boldsymbol{i} + p_{xy}\boldsymbol{j} + p_{xz}\boldsymbol{k})\mathrm{d}x,$$

$$\boldsymbol{p}_y + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{p}_y \mathrm{d}y = p_{yx}\boldsymbol{i} + p_{yy}\boldsymbol{j} + p_{yz}\boldsymbol{k} + \frac{\partial}{\partial y}(p_{yx}\boldsymbol{i} + p_{yy}\boldsymbol{j} + p_{yz}\boldsymbol{k})\mathrm{d}y,$$

$$\boldsymbol{p}_z + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{p}_z \mathrm{d}z = p_{zx}\boldsymbol{i} + p_{zy}\boldsymbol{j} + p_{zz}\boldsymbol{k} + \frac{\partial}{\partial z}(p_{zx}\boldsymbol{i} + p_{zy}\boldsymbol{j} + p_{zz}\boldsymbol{k})\mathrm{d}z.$$

所有六个面上这些力在 x、y、z 轴上的投影分别是

$$\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$\left(\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$\left(\frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

上式恰是矢量

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{p}_z}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{3.5.3}$$

的三个投影，因此上式(3.5.3)就是作用于此微元六面体上的全部表面力．

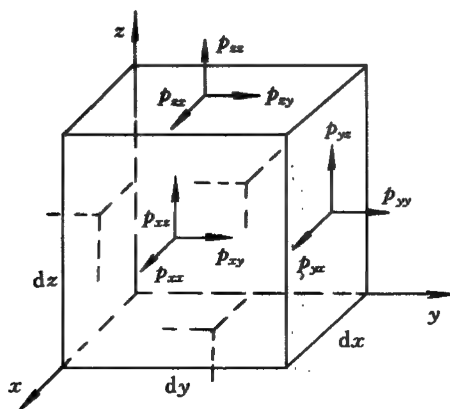


图 3.6　作用于微元上的应力

依动量平衡律，(3.5.1)、(3.5.2)、(3.5.3)三式有关系

$$\rho \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \left(\rho \boldsymbol{F}_{\mathrm{b}} + \frac{\partial \boldsymbol{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{p}_z}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

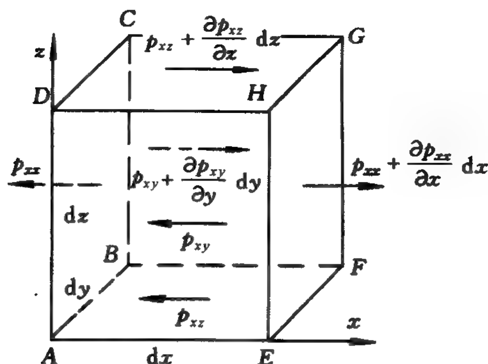


图 3.7 作用于微元上的 x 向应力

约去 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，得

$$\rho \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t} = \rho \boldsymbol{F}_{\mathrm{b}} + \frac{\partial \boldsymbol{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{p}_z}{\partial z}. \tag{3.5.4}$$

若定义

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{P} = \frac{\partial \boldsymbol{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{p}_z}{\partial z},$$

式(3.5.4)也可写为

$$\rho \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t} = \rho \boldsymbol{F}_{\mathrm{b}} + \mathrm{div}\ \boldsymbol{P} \tag{3.5.5}$$

式(3.5.4)、(3.5.5)就是微分形式的运动方程.

将(3.5.4)式写为分量形式，即将其式向三坐标轴投影有

$$\begin{cases} \rho \dfrac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t} = \rho F_{\mathrm{b}x} + \dfrac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \dfrac{\partial p_{zx}}{\partial z}, \\ \rho \dfrac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t} = \rho F_{\mathrm{b}y} + \dfrac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \dfrac{\partial p_{zy}}{\partial z}, \\ \rho \dfrac{\mathrm{D}w}{\mathrm{D}t} = \rho F_{\mathrm{b}z} + \dfrac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial p_{zz}}{\partial z}. \end{cases} \tag{3.5.6}$$

这是直角坐标系中的微分形式的运动方程.

在式(3.5.5)中，左端为单位体积流体的惯性力，右端第一项 $\rho \boldsymbol{F}_{\mathrm{b}}$ 为作用于单位体积流体上的质量力，第二项 $\mathrm{div}\ \boldsymbol{P}$ 为作用于单位体积流体上的表面力.

(二) 几种特殊形式

1. 纳维－斯托克斯方程

利用式(1.6.13)，

$$\nabla \cdot \boldsymbol{P} = \nabla \cdot \left\{ 2\mu \boldsymbol{S} - \left(p + \frac{2\mu}{3} \operatorname{div} \boldsymbol{v} \right) \boldsymbol{I} \right\}$$

$$= \operatorname{div}(2\mu \boldsymbol{S}) - \operatorname{grad} p - \frac{2}{3} \operatorname{grad} (\mu \operatorname{div} \boldsymbol{v}). \tag{3.5.7}$$

将上式代入式(3.5.5)得

$$\rho \frac{\mathrm{D} \boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t} = \rho \boldsymbol{F}_{\mathrm{b}} - \operatorname{grad} p + \operatorname{div}(2\mu \boldsymbol{S}) - \frac{2}{3} \operatorname{grad} (\mu \operatorname{div} \boldsymbol{v}). \tag{3.5.8}$$

上式称为纳维—斯托克斯方程.

式(3.5.8)左端代表单位体积流体的惯性力,右端第一项表示单位体积的质量力,第二项代表作用于单位体积流体的压强梯度力,第三项代表粘性变形应力,它只与流体的粘度系数和应变率张量有关,第四项代表粘性体膨胀应力.

当流体为均质不可压,即 $\rho=$ 常数时,$\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0$,再若 μ 也为常数,则(3.5.8)式为

$$\rho \frac{\mathrm{D} \boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t} = \rho \boldsymbol{F}_{\mathrm{b}} - \operatorname{grad} p + \mu \nabla^2 \boldsymbol{v} \tag{3.5.9}$$

其中 $\operatorname{div}\boldsymbol{S}$ 可仿效

$$\operatorname{div}\boldsymbol{P} = \frac{\partial \boldsymbol{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{p}_z}{\partial z},$$

及

$$\boldsymbol{p}_x = p_{xx} \boldsymbol{i} + p_{xy} \boldsymbol{j} + p_{xz} \boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{p}_y = p_{yx} \boldsymbol{i} + p_{yy} \boldsymbol{j} + p_{yz} \boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{p}_z = p_{zx} \boldsymbol{i} + p_{zy} \boldsymbol{j} + p_{zz} \boldsymbol{k}.$$

计算出

$$\operatorname{div}\boldsymbol{S} = \frac{1}{2} \nabla^2 \boldsymbol{v}.$$

式(3.5.9)写成直角坐标分量形式是

$$\rho \frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t} = \rho F_{\mathrm{b}x} - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 u,$$
$$\rho \frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t} = \rho F_{\mathrm{b}y} - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \nabla^2 v, \tag{3.5.10}$$
$$\rho \frac{\mathrm{D}w}{\mathrm{D}t} = \rho F_{\mathrm{b}z} - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 w,$$

这个公式在粘性流体力学中经常用到.

2. 欧拉方程

对无粘性流体,因 $\mu=0, \boldsymbol{P}=-p\boldsymbol{I}$,运动方程变为欧拉方程:

$$\rho \frac{\mathrm{D} \boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t} = \rho \boldsymbol{F}_{\mathrm{b}} - \operatorname{grad} p, \tag{3.5.11}$$

各项意义已如前述.

3. 静力学方程

若流体静止不动，$\boldsymbol{v}=0$，则运动方程简化为

$$\rho \boldsymbol{F}_{\mathrm{b}}=\operatorname{grad} p, \tag{3.5.12}$$

这个方程在第二章已讨论过.

4. 兰姆－葛罗米柯方程

因位变加速度

$$(\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{v}=\operatorname{grad} \frac{v^{2}}{2}+\operatorname{rot} \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}$$

将此代入式(3.5.5)得兰姆－葛罗米柯方程：

$$\rho\left[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\operatorname{grad} \frac{v^{2}}{2}+\operatorname{rot} \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}\right]=\rho \boldsymbol{F}_{\mathrm{b}}+\operatorname{div} \boldsymbol{P}. \tag{3.5.13}$$

5. 相对运动方程

运动方程(3.5.5)是在惯性系中推出的，为研究像大气、海洋及旋转系统中流体的运动，需要建立在非惯性系中的相对运动方程. 由理论力学知，绝对速度 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}$ 为相对速度 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$ 及牵连速度 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{e}}$ 之和：

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}=\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}+\boldsymbol{v}_{\mathrm{e}},$$

其中

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{e}}=\boldsymbol{v}_{0}+\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r},$$

$\boldsymbol{v}_0$ 为运动系中的平动速度，$\boldsymbol{\Omega}$ 是其转动角速度，$\boldsymbol{r}$ 为质点矢径.

绝对加速度 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}}$ 为相对加速度 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$、牵连加速度 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}$ 及科氏加速度 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{c}}$ 之和：

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{c}},$$

其中

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}=\frac{\mathrm{d} \boldsymbol{v}_{0}}{\mathrm{d} t}+\frac{\mathrm{d} \boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d} t} \times \boldsymbol{r}+\boldsymbol{\Omega} \times(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r})$$

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{c}}=2 \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$$

将绝对加速度代入运动方程(3.5.5)，即得相对运动方程

$$\rho \frac{\mathrm{D} \boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}}{\mathrm{D} t}=\rho \boldsymbol{F}_{\mathrm{b}}+\operatorname{div} \boldsymbol{P}-\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}-2 \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}. \tag{3.5.14}$$

对于密度为常数的流体，利用连续性方程及运动方程，已可解决一些简单应用问题. 方程为四个：一个连续性方程，三个运动方程；未知数也是四个：即 u、v、w 及 p. 理论上这四个未知数可由上述四个方程解得. 但实际上由于方程的非线性特征，一般地求解将是困难的. 幸运的是，一些问题避开了这些困难.

以下是一些可解问题的简单例子.

例 3.5 一等截面的细直管中，有一段长为 $2l$ 的无粘性等密度流体，流体受一方向始终指向一点，大小与各质点到该点的距离成正比的力的作用，求此流

体运动规律及每一质点的压强．设流体与空气接触处有大气压 p_0.

解　运动是一维的，运动方程为

$$\frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t}=F-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$

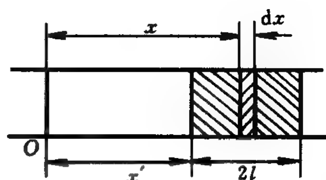


图 3.8

速度只有 u 分量，$u=u(x,t)$，

连续性方程为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0,$$

因此，速度 u 与 x 无关，即 $u=u(t)$，从而

$$\frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t}=\frac{\partial u}{\partial t}=F-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}.$$

外力可表示为

$$F=-kx\quad(k\text{ 为常数}).$$

将力 F 代入运动方程，

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-kx-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$

对 x 积分有

$$x\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{1}{2}kx^2-\frac{p}{\rho}+c_1(t).\tag{a}$$

若取 $x=x'$ 为流体块左侧表面的流动坐标，$x'+2l$ 为流体块右侧表面的流动坐标，利用左右两侧表面上压强 $p=p_0$ 的条件，就有

$$x'\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{1}{2}kx'^2-\frac{p_0}{\rho}+c_1(t),\tag{b}$$

$$(x'+2l)\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{1}{2}k(x'+2l)^2-\frac{p_0}{\rho}+c_1(t).\tag{c}$$

上两式中$\frac{\partial u}{\partial t}$只是 t 的函数，故$\frac{\partial u}{\partial t}$在两式中是相等的，上两式相减，得

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-k(x'+l).\tag{d}$$

又易知，$u=\partial x'/\partial t$，故有

$$\frac{\partial^2x'}{\partial t^2}+k(x'+l)=0.$$

积分上式得

$$x'+l=A\sin(\sqrt{k}t+s).\tag{e}$$

上式即为细管中流体的运动规律．再由(a)、(b)及(d)式得

$$\frac{p}{\rho}=-x\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{1}{2}kx^2+c_1(t)$$

$$= -x\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2}kx^2 + x'\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}kx'^2 + \frac{p_0}{\rho}$$

$$= \frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}k(x - x')(x' + 2l - x) \tag{f}$$

这是流体中任一点 x 处的压强值.

例 3.6 无限长环状液体在半径为 a 和 b 的柱体间. 液柱面 a 上有常压强 π 作用. 证明,若内柱 b 突然破灭,则液体内半径 r 处的压强立即变为

$$\pi\frac{\ln r - \ln b}{\ln a - \ln b}.$$

解 据题意,应用柱坐标. 显见,液体只能作径向运动,$v_\theta = 0, v_z = 0$,无质量力作用,密度为常数(流体),这时连续性方程及运动方程为

$$\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) = 0, \tag{a}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) = -\frac{\partial p}{\partial r}. \tag{b}$$

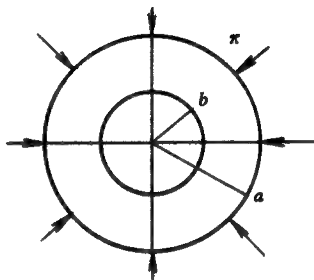


图 3.9

由(a)式,

$$rv_r = c_1(t). \tag{c}$$

将(c)式代入(b)式得

$$\rho\left(\frac{c'_1(t)}{r} + \frac{\partial}{\partial r}\frac{v_r^2}{2}\right) = -\frac{\partial p}{\partial r} \tag{d}$$

其中 $c'_1(t)$为 $c_1(t)$对 t 求导. 对 r 积分(d)式,得

$$c'_1(t)\ln r + \frac{1}{2}v_r^2 + \frac{p}{\rho} = c(t). \tag{e}$$

当 $t=0$ 时,边界上

$$r = a \text{ 处}, \quad v_r = 0, \quad p = \pi,$$
$$r = b \text{ 处}, \quad v_r = 0, \quad p = 0,$$

将此代入(e)式有

$$c'_1(0)\ln a + \frac{\pi}{\rho} = c(0),$$
$$c'_1(0)\ln b = c(0),$$

由上两式得
$$c'_1(0) = \frac{\pi}{\rho(\ln b - \ln a)}.$$

再由
$$c'_1(0)\ln r + \frac{p}{\rho}\bigg|_{t=0} = c(0),$$

得
$$p\big|_{t=0} = \pi\frac{\ln r - \ln b}{\ln a - \ln b}.$$

这就是所需要证的.

例 3.7　液体在等截面弯曲细管中作小振动,管中两液面处的管倾角分别为 α 及 β(如图 3.10),求振动规律及管中任一点处的液体压强.

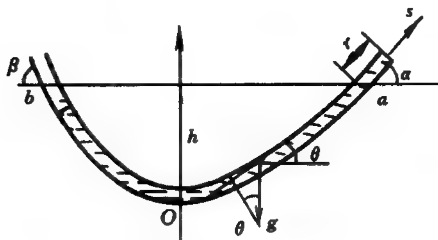


图 3.10

解　取管轴为坐标轴 s,O 为原点.

液体在管中作的是一维运动. 流体沿管流速为 q. 由连续性方程(密度为常数)

$$\frac{\partial q}{\partial s}=0. \tag{a}$$

由此得 $q=q(t)$,即管中液体任一点速度大小在同一时刻均相同,但不同时刻则可速度不同.

运动方程为

$$\rho\left(\frac{\partial q}{\partial t}+q\frac{\partial q}{\partial s}\right)=-\frac{\partial p}{\partial s}-\rho g\sin\theta, \tag{b}$$

其中右端第二项为重力于 s 轴向的投影,因式(a),(b)式可简化为

$$\rho\frac{\partial q}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial s}-\rho g\sin\theta, \tag{c}$$

取 $\sin\theta=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}$,并对(c)式积分得

$$s\frac{\partial q}{\partial t}=-\frac{p}{\rho}-gz+c(t), \tag{d}$$

设液体作小振动,在两端液面上压强为大气压 p_0. 设右端液面在平衡时位置为 $s=a$,液体振动时,液面离开平衡位置为 r,即液面位置在振动时为 $s=a+r$,同样,设左管端液面平衡时为 $s=-b$ 液体振动时,其位置为 $s=-(b-r)$,这样,

当 $s=a+r$ 时,　$z=h+r\sin\alpha$,　$p=p_0$,

当 $s=-(b-r)$ 时,　$z=h-r\sin\beta$,　$p=p_0$,

其中 h 为液体静止时的液面离开 O 点的高度.

将上述条件代入(d)式，得

$$(a+r)\frac{\partial q}{\partial t}=-\frac{p_0}{\rho}-g(h+r\sin\alpha)+c(t) \tag{e}$$

$$-(b-r)\frac{\partial q}{\partial t}=-\frac{p_0}{\rho}-g(h-r\sin\beta)+c(t), \tag{f}$$

上两式中$\frac{\partial q}{\partial t}$在两端液面是相同的. 将(e)、两式相减，得

$$(a+b)\frac{\partial q}{\partial t}=-gr(\sin\alpha+\sin\beta), \tag{g}$$

又

$$q=\frac{\partial r}{\partial t}, \tag{h}$$

故(g)式为

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}+\frac{g}{a+b}(\sin\alpha+\sin\beta)r=0, \tag{i}$$

解(i)式，得 $r=A\sin(\omega t+\varepsilon)$,

其中

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{a+b}(\sin\alpha+\sin\beta)}.$$

这便是管中液体的运动规律. 若给以初始条件，即可确定积分常数 A 及ε.

又由(d)、(e)两式中 $c(t)$相等得

$$s\frac{\partial q}{\partial t}+\frac{p}{\rho}+gz=(a+r)\frac{\partial q}{\partial t}+\frac{p_0}{\rho}+g(h+r\sin\alpha),$$

可得

$$\begin{aligned}\frac{p}{\rho}&=\frac{p_0}{\rho}+(a+r-s)\frac{\partial q}{\partial t}+g(h+r\sin\alpha-z)\\&=\frac{p_0}{\rho}-(a+r-s)\frac{gr}{a+b}(\sin\alpha+\sin\beta)+g(h+r\sin\alpha-z).\end{aligned}$$

这就是管中任一点处的压强表达式.

例 3.8 试推导无粘性流体的拉格朗日坐标的运动方程.

解 利用欧拉运动方程

$$\rho\frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t}=\rho F_{bx}-\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\rho\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t}=\rho F_{by}-\frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\rho\frac{\mathrm{D}w}{\mathrm{D}t}=\rho F_{bz}-\frac{\partial p}{\partial z}$$

将其中的加速度用$\partial^2 \boldsymbol{r}/\partial t^2$ 或$\partial^2 x/\partial t^2, \partial^2 y/\partial t^2, \partial^2 z/\partial t^2$ 代替，又设质量力 F_{bx}、F_{by}、F_{bz}已用拉格朗日变量表示，于是剩下是如何以$\partial p/\partial a$、$\partial p/\partial b$、$\partial p/\partial c$ 来代替$\partial p/\partial x$、$\partial p/\partial y$、$\partial p/\partial z$.

因

$$\frac{\partial p}{\partial a}=\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a}$$

$$=\rho\left(F_{bx}-\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)\frac{\partial x}{\partial a}+\rho\left(F_{by}-\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)\frac{\partial y}{\partial a}+\rho\left(F_{bz}-\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)\frac{\partial z}{\partial a},$$

故有

$$\left(F_{bx}-\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)\frac{\partial x}{\partial a}+\left(F_{by}-\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)\frac{\partial y}{\partial a}+\left(F_{bz}-\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)\frac{\partial z}{\partial a}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial a}.$$

同理有

$$\left(F_{bx}-\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)\frac{\partial x}{\partial b}+\left(F_{by}-\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)\frac{\partial y}{\partial b}+\left(F_{bz}-\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)\frac{\partial z}{\partial b}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial b}.$$

$$\left(F_{bx}-\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)\frac{\partial x}{\partial c}+\left(F_{by}-\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)\frac{\partial y}{\partial c}+\left(F_{bz}-\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)\frac{\partial z}{\partial c}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial c}.$$

这就是无粘性流体的拉格朗日坐标的运动方程.

例 3.9　试对柱坐标形式的微六面体，建立运动方程.

解　本例的推导与(3.5.4)式的推导大致相同，但了解其中一些细节，是有益的.

取一柱形微六面体(不动控制体)$ABCDEFGH$，A 点之速度为$\boldsymbol{v}$，密度为 ρ，质量力为 $\boldsymbol{F}$，表面力为 $\boldsymbol{p}_{-r}$、$\boldsymbol{p}_{-\theta}$、$\boldsymbol{p}_{-z}$.

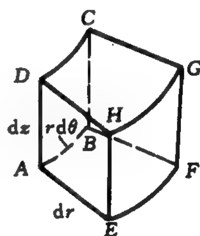


图 3.11

先计算系统之动量变化率，系统之动量变化率包括两部分，一部分是控制体内动量的变化率，它是单位时间控制体内动量对时间的偏导数，

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \boldsymbol{v})\, r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z.$$

另一部分经控制面的动量迁移而产生的，与前相类似，单位时间经全部控制面净流出的动量为

$$\left[\frac{\partial}{\partial r}(\rho v_r r\boldsymbol{v})+\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta \boldsymbol{v})+\frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z r\boldsymbol{v})\right]\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

$$=\left\{\boldsymbol{v}\left[\frac{\partial}{\partial r}(\rho v_r r)+\frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta}+\frac{\partial(\rho v_z r)}{\partial z}\right]\right.$$

$$\left.+\rho v_r r\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial r}+\rho v_\theta\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \theta}+\rho r v_z\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z}\right\}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z.$$

系统总动量的变化率为

$$\left[\frac{\partial(\rho \boldsymbol{v} r)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial r}(\rho v_r r \boldsymbol{v})+\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta \boldsymbol{v})+\frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z r \boldsymbol{v})\right]\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

$$=\left\{r\boldsymbol{v}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{r\partial r}(\rho v_r r)+\frac{\partial(\rho v_\theta)}{r\partial\theta}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right]\right.$$

$$\left.+\rho r\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+v_r\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial r}+v_\theta\frac{\partial \boldsymbol{v}}{r\partial\theta}+v_z\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z}\right)\right\}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

$$=\rho\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z. \tag{a}$$

上式中已用了柱坐标形式的连续性方程及随体导数公式，

因柱坐标中，速度表示为

$$\boldsymbol{v}=v_r\boldsymbol{e}_r+v_\theta\boldsymbol{e}_\theta+v_z\boldsymbol{e}_z. \tag{b}$$

将此代入随体导数公式中，

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}=\left(\frac{\partial}{\partial t}+v_r\frac{\partial}{\partial r}+v_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+v_z\frac{\partial}{\partial z}\right)(v_r\boldsymbol{e}_r+v_\theta\boldsymbol{e}_\theta+v_z\boldsymbol{e}_z).$$

在上式中，单位矢量 $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\theta$、$\boldsymbol{e}_z$ 对 r、θ、z 的偏导数不全为零，这与直角坐标的情形不同，其中 $\boldsymbol{e}_r$ 及 $\boldsymbol{e}_\theta$ 对 θ 的偏导数为

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_r=\boldsymbol{e}_\theta, \tag{c}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta=-\boldsymbol{e}_r, \tag{d}$$

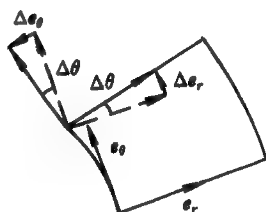


图 3.12 $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\theta$ 随 θ 的变化

这是由于在柱坐标系中，当角度 θ 变为 $\theta+\Delta\theta$ 时，单位矢量 $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\theta$ 也改变了角度 $\Delta\theta$（见图 3.12），成为 $\boldsymbol{e}_r+\Delta\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\theta+\Delta\boldsymbol{e}_\theta$，计算这变化率的极限，就得到式(c)、(d)。推导也可见附录 4. 这样，

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}=\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+v_\theta\frac{\partial v_r}{r\partial\theta}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}-\frac{v_\theta^2}{r}\right)\boldsymbol{e}_r$$

$$+\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+v_\theta\frac{\partial v_\theta}{r\partial\theta}+v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}+\frac{v_r v_\theta}{r}\right)\boldsymbol{e}_\theta$$

$$+\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+v_\theta\frac{\partial v_z}{r\partial\theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_z. \tag{e}$$

作用于微六面体上的质量力为

$$\rho\boldsymbol{F}_{\mathrm{b}r}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=(\rho F_{\mathrm{b}r}\boldsymbol{e}_r+\rho F_{\mathrm{b}\theta}\boldsymbol{e}_\theta+\rho F_{\mathrm{b}z}\boldsymbol{e}_z)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z. \tag{f}$$

作用于微六面体六个面元上的应力分别计算如下：在 $ABCD$ 与 $EFGH$ 两面元上的合力为

$$\frac{\partial}{\partial r}(\boldsymbol{p}_r r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z)\mathrm{d}r.$$

在 $AEHD$ 及 $BFGC$ 两面元上的合力为

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(\boldsymbol{p}_\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}z)\mathrm{d}\theta.$$

在 $AEFB$ 及 $DHGC$ 两面元上的合力为

$$\frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{p}_z \mathrm{d}r\, r\mathrm{d}\theta)\mathrm{d}z.$$

于是在全部控制面上的表面力合力为

$$\left[\frac{\partial(\boldsymbol{p}_r r)}{\partial r}+\frac{\partial \boldsymbol{p}_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial(\boldsymbol{p}_z r)}{\partial z}\right]\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z. \tag{g}$$

设

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}_r &= p_{rr}\boldsymbol{e}_r+p_{r\theta}\boldsymbol{e}_\theta+p_{rz}\boldsymbol{e}_z,\\ \boldsymbol{p}_\theta &= p_{\theta r}\boldsymbol{e}_r+p_{\theta\theta}\boldsymbol{e}_\theta+p_{\theta z}\boldsymbol{e}_z,\\ \boldsymbol{p}_z &= p_{zr}\boldsymbol{e}_r+p_{z\theta}\boldsymbol{e}_\theta+p_{zz}\boldsymbol{e}_z,\end{aligned}$$

利用(c)及(d)式后有

$$\begin{aligned}\frac{\partial(r\boldsymbol{p}_r)}{\partial r}+\frac{\partial \boldsymbol{p}_\theta}{\partial\theta}+\frac{(r\boldsymbol{p}_z)}{\partial z} &= \left[\frac{\partial(rp_{rr})}{\partial r}+\frac{\partial p_{\theta r}}{\partial\theta}+\frac{\partial(rp_{zr})}{\partial z}-p_{\theta\theta}\right]\boldsymbol{e}_r\\ &+\left[\frac{\partial(rp_{r\theta})}{\partial r}+\frac{\partial p_{\theta\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial(rp_{z\theta})}{\partial z}+p_{\theta r}\right]\boldsymbol{e}_\theta\\ &+\left[\frac{\partial(rp_{rz})}{\partial r}+\frac{\partial p_{\theta z}}{\partial\theta}+\frac{\partial(rp_{zz})}{\partial z}\right]\boldsymbol{e}_z.\end{aligned}$$

上式右端头两个括号中的第四项也是由于(c)、(d)两式而产生了合力 $p_{\theta\theta}$、$p_{\theta r}$. 依动量平衡律,联系(a)、(f)、(g)式有

$$\rho\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}=\rho\boldsymbol{F}_\mathrm{b}+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(r\boldsymbol{p}_r)}{\partial r}+\frac{\partial \boldsymbol{p}_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial(r\boldsymbol{p}_z)}{\partial z}\right].$$

这是用柱坐标表示的矢量形式的运动方程.

将(e)、(f)、(h)代入上式就得到分量形式的运动方程

$$\begin{aligned}&\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+v_\theta\frac{\partial v_r}{r\partial\theta}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}-\frac{v_\theta^2}{r}\right)\\ &=\rho F_{\mathrm{b}r}+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rp_{rr})}{\partial r}+\frac{\partial p_{\theta r}}{\partial\theta}+\frac{\partial(rp_{zr})}{\partial z}-p_{\theta\theta}\right],\\ &\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+v_\theta\frac{\partial v_\theta}{r\partial\theta}+v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}+\frac{v_\theta v_r}{r}\right)\\ &=\rho F_{\mathrm{b}\theta}+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rp_{r\theta})}{\partial r}+\frac{\partial p_{\theta\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial(rp_{z\theta})}{\partial z}+p_{\theta r}\right],\\ &\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+v_\theta\frac{\partial v_z}{r\partial\theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\\ &=\rho F_{\mathrm{b}z}+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rp_{rz})}{\partial r}+\frac{\partial p_{\theta z}}{\partial\theta}+\frac{\partial(rp_{zz})}{\partial z}\right],\end{aligned}$$

由此看出,柱坐标形式的运动方程比直角坐标要复杂一些,特别是,它多了两个加速度项 $-v_\theta^2/r$、$v_r v_\theta/r$,两个梯度力项 $-p_{\theta\theta}$、$p_{\theta r}$. 这都是由于角度 θ 变化时引起有关量变化造成的. 书写柱坐标形式的运动方程时,决不能把直角坐标的运动方程相应量填改一下来得到.

(三) 动量矩方程

动量矩平衡律的含义是,对一给定的流体系统,其动量对某一参考点的动量矩的矢量和的时间变化率,等于作用于流体上的力取同一点的力矩矢量和.

运用动量矩平衡律,没有得到新的结论,它只是再次证明了应力张量的对称性,这个证明将留给读者.

3.6 微分形式的能量方程

能量守恒律也是流体运动应遵循的一个普遍定律. 如果在一个实际问题中,热过程参与运动是重要的,则能量方程就成为一个需要被满足的独立的方程. 这时,除了要研究其中的速度场问题外,还需要研究其中的温度场问题. 而且,由于这两个场往往是相互作用的,即为了要确定速度分布和温度分布,需要联立运动方程和能量方程,这给问题的求解带来了困难.

能量方程来源于热力学第一定律. 热力学第一定律表述为,对某一流体系统所作的功和加给系统的热量,将等于系统的能量增加值. 需要指出,热力学第一定律是在系统处于平衡态时成立,而一般来说,流体系统在不断运动着. 实际上,由于流体松弛时间即调整到平衡态的时间很短(大约在 10^{-10}s 左右),可以假设,流体是处于一种局部平衡态,即离平衡态只有极小偏差的状态,流体将很快趋于平衡态.

设对系统,单位时间所作的功用 $\mathrm{d}w/\mathrm{d}t$ 表示,单位时间加给系统的热量用 Q 表示,则系统能量 E 的变化率为

$$\frac{\mathrm{D}E}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} + Q. \tag{3.6.1}$$

将热力学第一定律应用于流体运动,把上式各项用有关的流体物理量表示出来,即是能量方程. 对于能量,这里所指为三种形式:内能、动能及重力势能,设单位质量的内能用 e 表示,单位质量的动能用 $\frac{1}{2}v^2$ 表示,单位质量的重力势能用 gz 表示,则系统的能量 E,

$$E = \int e_s \rho \mathrm{d}\tau = \int \left(e + \frac{1}{2}v^2 + gz\right)\rho \mathrm{d}\tau,$$

其中 $e_s = e + \frac{1}{2}v^2 + gz$ 称为单位质量的储存能.

(一) 能量方程

以下用微元六面体建立微分形式的能量方程.

与前相同,在流场中取一固定不动的微元六面体(控制体),边长为 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z$,如图 3.7 所示,并取 t 时刻在此体元内的流体为一系统.

设 A 点的密度为 ρ,速度为 $\boldsymbol{v}$,温度为 T,质量力(已除去重力)为 $\boldsymbol{F}_{b1}$,A 点三个面元 $ABCD$、$AEHD$、$AEFB$ 上的应力分别为 $\boldsymbol{p}_{-x}$、$\boldsymbol{p}_{-y}$、$\boldsymbol{p}_{-z}$,$EFGH$、$BFGC$、$CDHG$ 三个面元上的应力分别如图所示.

与计算系统上的动量变化率一样,微元系统能量的时间变化率也分为两部分,一部分是控制体内储存能的变化,其单位时间的时间变化率为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e_s)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

另一部分为经控制面迁移的能引起的,单位时间经全部控制面净流出的储存能为

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u e_s) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v e_s) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w e_s)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

这样微元系统总的储存能的时间变化率为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}E}{\mathrm{D}t} &= \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho e_s) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u e_s) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v e_s) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w e_s)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \left[\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\rho e_s) + \rho e_s \mathrm{div}\, \boldsymbol{v}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \rho\frac{\mathrm{D}e_s}{\mathrm{D}t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\end{aligned} \tag{3.6.2}$$

上式也可这样得到,t 时刻微元系统有储存能 $\rho e_s\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其系统储存能的随体导数

$$\frac{\mathrm{D}E}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\rho e_s\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z) = \rho\frac{\mathrm{D}e_s}{\mathrm{D}t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + e_s\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z)$$

右端第二项为系统质量的随体导数,等于零,由此有

$$\frac{\mathrm{D}E}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\rho e_s\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z) = \rho\frac{\mathrm{D}e_s}{\mathrm{D}t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \tag{3.6.3}$$

其次计算对微元所作的功. 单位时间内质量力所作的功为

$$\rho\boldsymbol{F}_{b1}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \tag{3.6.4}$$

表面力所作的功,将依各应力分量分别计算. 如图 3.7,x 方向的应力所作功为

$$\left[\left(p_{xx} + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\left(u + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x\right) - p_{xx}u\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$+\left[\left(p_{xy}+\frac{\partial p_{xy}}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\left(u+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y\right)-p_{xy}u\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$+\left[\left(p_{xz}+\frac{\partial p_{xz}}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\left(u+\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z\right)-p_{xz}u\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial x}(p_{xx}u)+\frac{\partial}{\partial y}(p_{xy}u)+\frac{\partial}{\partial z}(p_{xz}u)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

同理,y,z 向的应力作功为

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}(p_{xy}v)+\frac{\partial}{\partial y}(p_{yy}v)+\frac{\partial}{\partial z}(p_{yz}v)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}(p_{xz}w)+\frac{\partial}{\partial y}(p_{yz}w)+\frac{\partial}{\partial z}(p_{zz}w)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

将全部表面力所作功相加可写为

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{p}_x\cdot\boldsymbol{v})+\frac{\partial}{\partial y}(\boldsymbol{p}_y\cdot\boldsymbol{v})+\frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{p}_z\cdot\boldsymbol{v})\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \tag{3.6.5}$$

这样,对微元六面体,质量力(除去重力)和表面力在单位时间共作功

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=\left[\rho\boldsymbol{F}_{\mathrm{b}}\cdot\boldsymbol{v}+\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{p}_x\cdot\boldsymbol{v})+\frac{\partial}{\partial y}(\boldsymbol{p}_y\cdot\boldsymbol{v})+\frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{p}_z\cdot\boldsymbol{v})\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \tag{3.6.6}$$

最后,再计算加给微元六面体的热量. 这里计算的是辐射热及传导热两种,辐射热是通过电磁波对流体产生热量,设单位时间内由辐射传入单位质量流体的热量为 q,则单位时间内在微元内产生辐射热为

$$\rho q\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \tag{3.6.7}$$

传导热通过流体表面传入流体. 根据 1.1 节傅里叶定律,单位时间内通过 $ABCD$ 面元传入微元的热量为

$$-k\frac{\partial T}{\partial x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

单位时间内通过 $EFGH$ 面元传入微元的热量为

$$k\frac{\partial T}{\partial x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x,$$

于是单位时间经此两面共传入热量为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x.$$

同理经 $AFHD$、$BFGC$ 两对面元单位时间传入热量为

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\mathrm{d}z\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y,$$

经 $AEFB$、$DHGC$ 两对面元单位时间传入热量为

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z.$$

因而经微元体全部表面，单位时间传入微元的热量为

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$=\nabla\cdot(k\nabla T)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \tag{3.6.8}$$

从而，加给微元的总热量 Q 为

$$Q=[\rho q+\nabla\cdot(k\nabla T)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{3.6.9}$$

依能量守恒的热力学第一定律(3.6.1)式，将(3.6.3)、(3.6.6)、(3.6.9)各式代入，得

$$\rho\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}e_s\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\left[\rho\boldsymbol{F}_{\mathrm{b1}}\cdot\boldsymbol{v}+\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{p}_x\cdot\boldsymbol{v})\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial y}(\boldsymbol{p}_y\cdot\boldsymbol{v})+\frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{p}_z\cdot\boldsymbol{v})+\rho q+\nabla\cdot(k\nabla T)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

约去 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 得

$$\rho\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}e_s=\rho\boldsymbol{F}_{\mathrm{b1}}\cdot\boldsymbol{v}+\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{p}_x\cdot\boldsymbol{v})$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}(\boldsymbol{p}_y\cdot\boldsymbol{v})+\frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{p}_z\cdot\boldsymbol{v})+\rho q+\nabla\cdot(k\nabla T). \tag{3.6.10}$$

因

$$\begin{cases}\boldsymbol{p}_x\cdot\boldsymbol{v}=p_{xx}u+p_{xy}v+p_{xz}w,\\ \boldsymbol{p}_y\cdot\boldsymbol{v}=p_{yx}u+p_{yy}v+p_{yz}w,\\ \boldsymbol{p}_z\cdot\boldsymbol{v}=p_{zx}u+p_{zy}v+p_{zz}w.\end{cases}$$

上式右端三个量组成了一个矢量并以 $\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{v}$ 表示：

$$\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}p_{xx} & p_{xy} & p_{xz}\\ p_{yx} & p_{yy} & p_{zy}\\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ v\\ w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_{xx}u+p_{xy}v+p_{xz}w\\ p_{yx}u+p_{yy}v+p_{yz}w\\ p_{zx}u+p_{zy}v+p_{zz}w\end{bmatrix},$$

故(3.6.10)式中三个量构成了散度：

$$\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{p}_x\cdot\boldsymbol{v})+\frac{\partial}{\partial y}(\boldsymbol{p}_y\cdot\boldsymbol{v})+\frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{p}_z\cdot\boldsymbol{v})=\mathrm{div}\,(\boldsymbol{P}\cdot v). \tag{3.6.11}$$

最后(3.6.10)成为

$$\rho\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}e_s=\rho\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(e+\frac{1}{2}v^2+gz\right)$$
$$=\rho\boldsymbol{F}_{\mathrm{b1}}\cdot\boldsymbol{v}+\mathrm{div}(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{v})+\mathrm{div}\,(k\ \mathrm{grad}\ T)+\rho q. \tag{3.6.12}$$

这就是微分形式的能量方程.

将式(3.6.12)除以 ρ，有

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}e_s=\boldsymbol{F}_{\mathrm{b1}}\cdot\boldsymbol{v}+\frac{1}{\rho}\mathrm{div}\,(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{v})+\frac{1}{\rho}\mathrm{div}\,(k\ \mathrm{grad}\ T)+q. \tag{3.6.13}$$

上式中各项的意义是,左端为单位质量流体储存能(包括内能、动量及势能)的变化率,右端第一项为单位时间内质量力(除去重力)对单位质量流体所作功,第二项为单位时间内表面力对单位质量流体所作的功,第三项为单位时间内外界通过单位质量流体表面因传导所传入的热量,第四项为单位时间内加给单位质量流体的辐射热,以下不予考虑.

(二) 动能(机械能)方程

将速度 v 点乘运动方程(3.5.5),得

$$\boldsymbol{v}\cdot\rho\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}=\boldsymbol{v}\cdot\rho\boldsymbol{F}_{\mathrm{b}}+\boldsymbol{v}\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{P}),\tag{3.6.14}$$

左端项有 $\boldsymbol{v}\cdot\rho\dfrac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}=\rho\dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\dfrac{v^2}{2}$,

于是(3.6.14)式变为

$$\rho\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\frac{v^2}{2}=\rho\boldsymbol{F}_{\mathrm{b}}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{P})\tag{3.6.15}$$

上式称为动能方程,也称机械能方程.

上式中 $\boldsymbol{v}\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{P})/\rho$ 为单位时间内,作用于单位质量流体上的表面力所作的功,此功为可转换成动能.

对无粘性流体,$\nabla\cdot\boldsymbol{P}=-\nabla p$,动能方程变为

$$\rho\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\frac{v^2}{2}=\rho\boldsymbol{F}_{\mathrm{b}}\cdot\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}\cdot\nabla p.\tag{3.6.16}$$

该式右端为质量力和表面力所作的功.

(三) 内能方程

由式(3.6.11),

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{v})&=\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{p}_x\cdot\boldsymbol{v})+\frac{\partial}{\partial y}(\boldsymbol{p}_y\cdot\boldsymbol{v})+\frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{p}_z\cdot\boldsymbol{v})\\&=\boldsymbol{v}\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{p}_x}{\partial x}+\frac{\partial\boldsymbol{p}_y}{\partial y}+\frac{\partial\boldsymbol{p}_z}{\partial z}\right)+\boldsymbol{p}_x\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x}+\boldsymbol{p}_y\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial y}+\boldsymbol{p}_z\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial z}\\&=\boldsymbol{v}\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{P})+\boldsymbol{p}_x\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x}+\boldsymbol{p}_y\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial y}+\boldsymbol{p}_z\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial z},\end{aligned}\tag{3.6.17}$$

又

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{p}_x\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x}+\boldsymbol{p}_y\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial y}+\boldsymbol{p}_z\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial z}\\&=p_{xx}\frac{\partial u}{\partial x}+p_{xy}\frac{\partial v}{\partial x}+p_{xz}\frac{\partial w}{\partial x}+p_{yx}\frac{\partial u}{\partial y}\\&\quad+p_{yy}\frac{\partial v}{\partial y}+p_{yz}\frac{\partial w}{\partial y}+p_{zx}\frac{\partial u}{\partial z}+p_{zy}\frac{\partial v}{\partial z}+p_{zz}\frac{\partial w}{\partial z}\\&=p_{xx}\frac{\partial u}{\partial x}+p_{xy}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)+p_{xz}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\end{aligned}$$

$$+p_{yx}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+p_{yy}\frac{\partial v}{\partial y}+p_{yz}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$+p_{zx}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)+p_{zy}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)+p_{zz}\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$=\boldsymbol{P}:\boldsymbol{S}. \tag{3.6.18}$$

上式中已用了应力张量的对称性：$p_{xy}=p_{yx}$，等等．且定义张量数乘 $\boldsymbol{P}:\boldsymbol{S}$ 为两张量相应的九个分量乘积之和．其中 $\boldsymbol{S}$ 为 1.4 节的应变率张量．

将上式(3.6.18)代入(3.6.17)式，有

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{P})+\boldsymbol{P}:\boldsymbol{S}. \tag{3.6.19}$$

再将上式代入(3.6.12)式，

$$\rho\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}e_s=\rho\boldsymbol{F}_{b1}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{P})+\boldsymbol{P}:\boldsymbol{S}+\operatorname{div}(k\operatorname{grad}T) \tag{3.6.20}$$

现将上式减去(3.6.15)式，得

$$\rho\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}e=[\boldsymbol{P}]:[\boldsymbol{S}]+\operatorname{div}(k\operatorname{grad}T). \tag{3.6.21}$$

应当注意，(3.6.15)式中的 $\boldsymbol{F}$ 是包含重力在内的质量力，与式(3.6.20)中的 $\boldsymbol{F}_{b1}$ 不同：

$$\frac{\mathrm{D}(gz)}{\mathrm{D}t}=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)(gz)=\boldsymbol{v}\cdot g\boldsymbol{k}=\boldsymbol{v}\cdot(-\boldsymbol{g})=-\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{F}_b=\boldsymbol{F}_{b1}+\boldsymbol{g}.$$

式(3.6.21)中 $\boldsymbol{P}:\boldsymbol{S}$ 为表面力使流体产生变形时所作的功，它不转换为动能，而是转换为流体的内能．

因此表面力所作功 $\operatorname{div}(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{v})$，依(3.6.19)式，前一部分可以转换为动能，后一部分不能转换为动能，只能转换为内能．这两部分的根本差别是前者与速度有关，而后者与速度的空间变化—变形有关．

从本构关系式(1.6.10)有

$$\boldsymbol{P}:\boldsymbol{S}=\left\{-p\boldsymbol{I}+2\mu\left(\boldsymbol{S}-\frac{1}{3}\operatorname{div}\boldsymbol{v}\right)\boldsymbol{I}\right\}:\boldsymbol{S},$$

$$=-p\operatorname{div}\boldsymbol{v}+2\mu\boldsymbol{S}:\boldsymbol{S}-\frac{2\mu}{3}(\operatorname{div}\boldsymbol{v})^2,$$

$$=-p\operatorname{div}\boldsymbol{v}+\varphi, \tag{3.6.22}$$

其中

$$\varphi=2\mu\boldsymbol{S}:\boldsymbol{S}-\frac{2\mu}{3}(\operatorname{div}\boldsymbol{v})^2$$

$$=2\mu\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}$$

$$-\frac{2\mu}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \geqslant 0. \qquad (3.6.23)$$

这表明，可转换为内能的一部分功 $\boldsymbol{P}:\boldsymbol{S}$ 分为两部分，与粘性有关的一部分为 φ，由于 $\varphi \geqslant 0$，说明功总是被耗散的，即粘性应力所作功总是不断地转换成热，并由热转化成内能，这一转化是不可逆的．因此在流体力学中称 φ 为耗散功，或耗散函数．与此不同，$-p\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}$ 这一部分功，表示流体压缩（$\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}<0$）或膨胀（$\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}>0$）时，压强 p 所作的功：压缩时，功转为内能，膨胀时，内能转为功．即它们的转化是可逆的．

将(3.6.22)式代入(3.6.21)式，并忽略辐射热项，则(3.6.21)式变为

$$\rho\frac{\mathrm{D}e}{\mathrm{D}t}+p\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}=\mathrm{div}\,(k\mathrm{grad}\;T)+\varphi \qquad (3.6.24)$$

这就是用内能表示的能量方程．它还可以根据不可压缩流体和完全气体两种情况作进一步简化．

首先，对不可压缩流体，从连续性方程(3.4.12)和从热力学关系式 $e=CT$ 分别有 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}=0$ 与 $\frac{\mathrm{D}e}{\mathrm{D}t}=C\frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t}$ 代入(3.6.24)式后有

$$\rho C\frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t}=\mathrm{div}(k\mathrm{grad}\;T)+\varphi, \qquad (3.6.25)$$

其中 $C=\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}$ 为流体的比热．对不可压缩流体可以不再区分定容比热 C_V 与定压比热 C_p，而用统一的比热 C 表示．

其次，对完全气体，利用连续性方程(3.4.9)和热力学关系式 $i=e+pV$ 有

$$\rho\frac{\mathrm{D}e}{\mathrm{D}t}-\frac{p}{\rho}\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}=\rho\frac{\mathrm{D}i}{\mathrm{D}t}-\frac{\mathrm{D}p}{\mathrm{D}t}.$$

代入(3.6.24)式后有

$$\rho\frac{\mathrm{D}i}{\mathrm{D}t}=\frac{\mathrm{D}p}{\mathrm{D}t}+\mathrm{div}\,(k\mathrm{grad}\;T)+\varphi. \qquad (3.6.26\mathrm{a})$$

这就是用焓表示的能量方程，如果再用热力学关系式 $i=C_pT$，则上式可改写为

$$\rho C_p\frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t}=\frac{\mathrm{D}p}{\mathrm{D}t}+\mathrm{div}\,(k\mathrm{grad}\;T)+\varphi. \qquad (3.6.26\mathrm{b})$$

类似地，利用连续性方程(3.4.9)与对可逆过程的热力学第一定律

$$T\mathrm{d}S=\mathrm{d}Q=\mathrm{d}e+p\mathrm{d}V$$

有

$$\begin{aligned}\rho\frac{\mathrm{D}e}{\mathrm{D}t}+p\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}&=\rho\frac{\mathrm{D}e}{\mathrm{D}t}-\frac{p}{\rho}\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}\\&=\rho\left[\frac{\mathrm{D}e}{\mathrm{D}t}+p\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]\\&=\rho\left[\frac{\mathrm{D}e}{\mathrm{D}t}+p\frac{\mathrm{D}V}{\mathrm{D}t}\right]\end{aligned}$$

$$= \rho T \frac{\mathrm{D}S}{\mathrm{D}t}.$$

将此式代入(3.6.24)式后有

$$\rho T \frac{\mathrm{D}S}{\mathrm{D}t} = \mathrm{div}\,(k\mathrm{grad}\ T) + \varphi. \tag{3.6.27}$$

这就是用熵表示的能量方程.

3.7　积分形式的流体力学方程组

前面三节是对一固定在空间的特殊流体微元应用基本定律,得到了微分形式的流体力学方程组,现用3.2节的雷诺输运定理建立积分形式的流体力学方程组,并讨论它们之间的互换关系

(一) 建立积分形式的流体力学方程组

在流场中取一固定的有限控制体积 τ,它的表面为 S,流场中的密度,速度,温度和压强分布分别用 $\rho, \boldsymbol{v}$,T 和 p 表示,现在来对此控制体应用基本定律.

1. 连续性方程

体积 τ 中的流体质量 $m = \int_\tau \rho \mathrm{d}\tau$. 根据 质量守恒原理有

$$\frac{\mathrm{D}m}{\mathrm{D}t} = 0 \quad 或 \quad \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_\tau \rho \mathrm{d}\tau = 0. \tag{3.7.1}$$

利用方程(3.2.13)有

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\tau \rho \mathrm{d}\tau + \int_S \rho \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = 0. \tag{3.7.2a}$$

由于控制体为固定的,可改写为

$$\int_\tau \frac{\partial \rho}{\partial t} + \int_S \rho \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = 0.$$

利用奥 - 高公式　$$\int_S \rho \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \int_\tau \mathrm{div}\ \rho \boldsymbol{v} \mathrm{d}\tau.$$

上式变为　$$\int_\tau \left[\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho \mathrm{div}\ \boldsymbol{v}\right] \mathrm{d}\tau = 0. \tag{3.7.2b}$$

方程(3.7.2a)与(3.7.2b)均为积分形式的连续性方程.

2. 运动方程

设作用于控制体积 τ 上的一切外力为 $\sum \boldsymbol{F}$,包括作用于控制体表面的法向压强 $\boldsymbol{p}_n$ 与作用于单位质量上的质量力 $\boldsymbol{F}_\mathrm{b}$. 体积 τ 的动量 $\boldsymbol{P} = \int_\tau \boldsymbol{v}\rho \mathrm{d}\tau$.

根据动量平衡原理有

$$\sum \boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{P}}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_\tau \boldsymbol{v}\rho \mathrm{d}\tau. \tag{3.7.3}$$

利用方程(3.2.13)此式可改写为

$$\sum \boldsymbol{F} = \frac{\partial}{\partial t}\int_\tau \rho \boldsymbol{v} \mathrm{d}\tau + \int_S \rho \boldsymbol{v}\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}. \tag{3.7.4a}$$

考虑到体积 τ 为固定的和利用奥－高公式后上式变为

$$\sum \boldsymbol{F} = \int_\tau \rho \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}\mathrm{d}\tau.$$

而此式的左边又可改写为

$$\begin{aligned}\sum \boldsymbol{F} &= \int_\tau \rho \boldsymbol{F}_\mathrm{b}\mathrm{d}\tau + \int_S \boldsymbol{p}_n \mathrm{d}A \\ &= \int_\tau \rho \boldsymbol{F}_\mathrm{b}\mathrm{d}\tau + \int_\tau \mathrm{div}\,\boldsymbol{P}\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

于是有

$$\int_\tau \rho \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}\mathrm{d}\tau = \int_\tau \rho \boldsymbol{F}_\mathrm{b}\mathrm{d}\tau + \int_\tau \mathrm{div}\,\boldsymbol{P}\mathrm{d}\tau. \tag{3.7.4b}$$

方程(3.7.4a)与(3.7.4b)均为积分形式的运动方程.

例 3.10 试写出非惯性系中积分形式的运动方程.

解 取两坐标系,一是惯性系 $Oxyz$,另一是固连于控制体的运动坐标系 $Ox'y'z'$.

依牛顿第二定律,在惯性系中作用于流体系统的力

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int \rho \boldsymbol{v}\mathrm{d}\tau = \int \rho \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}\mathrm{d}\tau = \int \rho\, \boldsymbol{a}_\mathrm{a}\mathrm{d}\tau,$$

式中 $\boldsymbol{a}$ 为依惯性系计算的绝对加速度.

在运动坐标系中,控制体固定不动,可运用公式(3.2.13). 而在公式(3.2.13)中为依运动坐标系计算. 即计算 $\int \rho\, \boldsymbol{a}_\mathrm{r}\mathrm{d}\tau$. 因

$$\boldsymbol{a}_\mathrm{a} = \boldsymbol{a}_\mathrm{r} + \boldsymbol{a}_\mathrm{e} + \boldsymbol{a}_\mathrm{c}$$

$$\boldsymbol{F} = \int \rho\, \boldsymbol{a}_\mathrm{a}\mathrm{d}\tau = \int \rho(\boldsymbol{a}_\mathrm{r} + \boldsymbol{a}_\mathrm{e} + \boldsymbol{a}_\mathrm{c})\mathrm{d}\tau$$

式中 $\boldsymbol{a}_\mathrm{r}$ 为对运动坐标系内的相对加速度,

$\boldsymbol{a}_\mathrm{e}$ 为运动坐标系相对于惯性系的牵连加速度,

$$\boldsymbol{a}_\mathrm{e} = \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}_0}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{r} + \omega \times (\omega \times \boldsymbol{r}).$$

$\boldsymbol{a}_\mathrm{c}$ 为科氏加速度,设 $\boldsymbol{v}_\mathrm{r}$ 为运动坐标系中的相对速度,

$$\boldsymbol{a}_\mathrm{c} = 2\omega \times \boldsymbol{v}_\mathrm{r}$$

因此

$$\int \rho\, \boldsymbol{a}_\mathrm{r}\mathrm{d}\tau = \int \rho(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_\mathrm{e} - \boldsymbol{a}_\mathrm{c})\mathrm{d}\tau.$$

最后得到

$$\int_\tau \rho \boldsymbol{F} \mathrm{d}\tau + \oint_S \boldsymbol{p}_n \mathrm{d}A - \int_\tau \rho(\boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_c)\mathrm{d}\tau$$
$$= \frac{\partial}{\partial t}\int_\tau \rho \boldsymbol{v}_r \mathrm{d}\tau + \oint_S \boldsymbol{v}_r \rho \boldsymbol{v}_r \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}A \tag{3.7.5}$$

这就是非惯性系中积分形式的运动方程.

若控制体仅作平移运动,无旋转,则上式为

$$\int_\tau \rho \boldsymbol{F} \mathrm{d}\tau + \oint_S \boldsymbol{p}_n \mathrm{d}A - \int_\tau \rho \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_0}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}\tau = \frac{\partial}{\partial t}\int_\tau \rho \boldsymbol{v}_r \mathrm{d}\tau + \oint_S \boldsymbol{v}_r \rho \boldsymbol{v}_r \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}A \tag{3.7.6}$$

3. 动量矩方程

设 $\boldsymbol{r}$ 为质量或体积(或面积)元相对于坐标系原点的位置矢量,$\sum \boldsymbol{T}$ 为作用于控制体积上的一切转矩. 对控制体 τ 的动量矩 $\boldsymbol{H} = \int_\tau \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}\rho \mathrm{d}\tau$.

根据动量矩平衡律有

$$\sum \boldsymbol{T} = \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{H}}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_\tau \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}\rho \mathrm{d}\tau \tag{3.7.7}$$

利用方程(3.2.13)有

$$\sum \boldsymbol{T} = \frac{\partial}{\partial t}\int_\tau \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}\rho \mathrm{d}\tau + \int_S \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}\rho \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} \tag{3.7.8a}$$

而此式的左边与右边可分别改写为

$$\int_\tau \rho \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_b \mathrm{d}\tau + \int_S \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}_n \mathrm{d}A \quad 与 \quad \int_\tau \rho \boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}\mathrm{d}\tau,$$

于是有 $\int_\tau \rho \boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}\mathrm{d}\tau = \int_\tau \rho \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_b \mathrm{d}\tau + \int_S \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}_n \mathrm{d}A$

或

$$\int_\tau \rho \boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}\mathrm{d}\tau = \int_\tau \rho \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_b \mathrm{d}\tau + \int_\tau \Big[\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}_x)$$
$$+ \frac{\partial}{\partial y}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}_z)\Big]\mathrm{d}\tau \tag{3.7.8b}$$

方程(3.7.8a)与(3.7.8b)均为积分形式的动量矩方程.

4. 能量方程

设单位质量流体的储存能、内能、动能和势能分为 e_s、e,$\frac{1}{2}v^2$ 和 gz 并有 $e_s = e + \frac{1}{2}v^2 + gz$,$Q$ 为每单位时间控制体与外界交换的一切热量,并取外界加于控制体为正,W 为外界对控制体所作的一切功,并取外界对控制体作功为正. 控制体的储存能 $E = \int_\tau \rho e_s \mathrm{d}\tau$.

根据能量守恒原理即热力学第一定律

$$Q+\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{D}E}{\mathrm{D}t},$$

利用方程(3.2.13)可改写为

$$Q+\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\tau}\rho e_s\mathrm{d}\tau+\int_S\rho e_s\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}A. \tag{3.7.9}$$

现在来对方程(3.7.9)式中的各项逐个加以说明:(1)与以前一样,上式中右边两项可合写为$\int_{\tau}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\rho e_s\mathrm{d}\tau$,(2) 上式左边第一项 $Q=Q_r+Q_h$,其中 $Q_r=\int_{\tau}\rho q\mathrm{d}\tau$ 为每单 位时间传入控制体的辐射热,$Q_h=\int_S k\frac{\partial T}{\partial n}\mathrm{d}A$ 为每单位时间通过控制体表面S 传入(或出)的热量,(3)左边第二项为每单位时间一切外力对控制体所作的功$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{b}}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{s}}}{\mathrm{d}t}$,其中$\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}$为每单位时间外界对控制体所作的机械功,$\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{b}}}{\mathrm{d}t}=\int_{\tau}\rho\boldsymbol{F}_{\mathrm{b1}}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}\tau$ 为每单位时间质量力$\boldsymbol{F}_{\mathrm{b1}}$(重力除外)对控制体所作的功,和 $\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{s}}}{\mathrm{d}t}=\int_S\boldsymbol{p}_n\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}A=-\int p\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}A=-\int_S\frac{p}{\rho}\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}A$ 为每单位时间控制体表面上法向压强所作的功.

在方程(3.7.9)中,如果忽略 Q_r 项与$\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{b}}}{\mathrm{d}t}$项,并将$\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{s}}}{\mathrm{d}t}$项与该式右边的第二项相合并则上方程变为:

$$Q_h+\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\tau}\rho e_s\mathrm{d}\tau+\int_S\left(e_s+\frac{p}{\rho}\right)(\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}A \tag{3.7.10a}$$

类似地,在方程(3.7.9)中,如果忽略 Q_r 项与$\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}$项则该式变为:

$$\int_S k\frac{\partial T}{\partial n}\mathrm{d}A+\int_{\tau}\rho\boldsymbol{F}_{\mathrm{b1}}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}\tau+\int_S\boldsymbol{p}_n\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}A=\int_{\tau}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\rho e_s\mathrm{d}\tau$$

或

$$\int_{\tau}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\rho e_s\mathrm{d}\tau=\int_{\tau}\rho\boldsymbol{F}_{\mathrm{b1}}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}\tau+\int_{\tau}\mathrm{div}\,(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{v})\mathrm{d}\tau+\int_{\tau}\mathrm{div}(k\,\mathrm{grad}\,T)\mathrm{d}\tau. \tag{3.7.10b}$$

方程(3.7.10a)与(3.7.10b)均为积分形式的能量方程.

(二) 将积分形式的方程组转换为微分形式的方程组

利用 τ 的任意性,从(3.7.2b)、(3.7.4b)、(3.7.8b)、(3.7.10b)式,可得到各体积分项中的被积函数之间的关系.

对连续性方程积分形式(3.7.2b),有

$$\int_{\tau}\left(\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}+\rho\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\right)\mathrm{d}\tau=0.$$

利用 τ 的任意性,得微分形式的连续性方程

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}+\rho\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0,$$

这与式(3.4.9)相同.

同理,对运动方程积分形式(3.7.4b),同样有

$$\rho\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}=\rho\boldsymbol{F}_{\mathrm{b}}+\operatorname{div}\boldsymbol{P},$$

这与式(3.5.5)相同.

对动量矩方程积分形式(3.7.8b),同样有

$$\boldsymbol{r}\times\rho\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}=\rho\,\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_{\mathrm{b}}+\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}_y)+\frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}_z).$$

因

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}_y)+\frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}_z)\\&=\boldsymbol{r}\times\left(\frac{\partial\boldsymbol{p}_x}{\partial x}+\frac{\partial\boldsymbol{p}_y}{\partial y}+\frac{\partial\boldsymbol{p}_z}{\partial z}\right)+\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{p}_x+\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{p}_y+\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{p}_z,\end{aligned}$$

故有

$$\boldsymbol{r}\times\left(\rho\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}-\rho\boldsymbol{F}_{\mathrm{b}}-\frac{\partial\boldsymbol{p}_x}{\partial x}-\frac{\partial\boldsymbol{p}_y}{\partial y}-\frac{\partial\boldsymbol{p}_z}{\partial z}\right)=\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{p}_x+\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{p}_y+\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{p}_z.$$

上式左端因运动方程而等于零,而右端即为

$$p_{xy}=p_{yx},\quad p_{yz}=p_{zy},\quad p_{zx}=p_{xz},\tag{3.7.16}$$

这是应力张量 $\boldsymbol{P}$ 的对称性,因此动量矩方程没有带来一个独立的结果.

对能量方程积分形式(3.7.10b),同样有

$$\rho\frac{\mathrm{D}e_s}{\mathrm{D}t}=\rho\boldsymbol{F}_{\mathrm{b1}}\cdot\boldsymbol{v}+\operatorname{div}(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{v})+\operatorname{div}(k\operatorname{grad}T),$$

这与式(3.6.12)式相同.

积分形式的流体力学方程组,是很有实用意义的. 可以用来解决一些实际问题,具体例子将在第四章中给出.

3.8　状态方程

前面几节介绍了四个基本定律,它们引入了速度、压强、密度、温度等量,这里再介绍一个基本的关系式;状态方程,它联系了压强、密度及温度.

(一) 状态方程

设流体处于平衡态,即置于一定环境之中的热力学系统,在不受外界影响的

条件下，能处于这种状态而历久不变．由于平衡态这种状态的确定性，就可以用一些宏观量描述该状态，这些量称为状态参量．如温度 T、体积 V、压强 p．描述一定质量的均匀系统，只需两个独立的状态参量，例如，体积 V，压强 p 就可以了．其余的状态参量，例如温度可以用这两个独立参量来表示：

$$T = T(p, V). \tag{3.8.1}$$

这就是均匀系统的状态方程．在热力学中，要知道这种方程的具体函数形式，必须进行实验确定，或者由统计物理学从理论上推导出来．

对于完全气体，状态方程可写为

$$pV = nR_0 T, \tag{3.8.2}$$

其中 n 为气体的摩尔数，R_0 为普适气体常数：$R_0 = 8.31\times 10^7$ J/K·mol．对单位质量气体，

$$pv = \frac{R_0}{M}T = RT \tag{3.8.3}$$

或

$$p = \rho RT, \tag{3.8.4}$$

式中 v 表示单位质量气体的体积，ρ 为密度，M 为摩尔质量，$R = R_0/M$ 为气体常数，它随气体而不同，例如空气的气体常数为 $R = 287$ J/kg·K，蒸汽的 $R = 462$ J/kg·K．式(3.8.3)或(3.8.4)称为克拉珀龙方程．在常温常压下，一般气体都可近似地认为是完全气体．

在高度压缩的气体中，必须考虑分子间的作用力及分子占有体积的影响，其状态方程通常采用范德瓦耳斯方程描述：

$$\left(p + \frac{\alpha}{v^2}\right)(v - \beta) = RT, \tag{3.8.5}$$

其中 α/v^2 代表气体分子间的引力的作用，β 代表分子的体积．α、β 称为范德瓦耳斯常数．对不同的气体，它们有不同的数值(表 3.1)．

空气是多种气体的混合物，根据道尔顿分压定律，即混合气体的压强等于各组分的分压强之和，有

表 3.1 范德瓦耳斯常数表

气 体	α(大气压 cm^6/mol^2)	β(cm^3/mol)
He	$0.034\,15\times 10^6$	23.71
Ne	$0.212\,0\times 10^6$	17.10
A	1.301×10^6	30.22
H_2	$0.244\,6\times 10^6$	26.61
N_2	1.346×10^6	38.52
O_2	1.361×10^6	32.58

$$p = p_1 + p_2 + \cdots + p_m, \tag{3.8.6}$$

$$pv = (n_1 + n_2 + \cdots + n_m)RT. \tag{3.8.7}$$

若令 $n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$,则上式可写为

$$pv = nRT. \tag{3.8.8}$$

这样,混合气体的状态方程完全类似于单一气体的状态方程,只需使摩尔数等于各组分的摩尔数之和.

若把大气视为湿空气,即视为干空气及水汽之混合物,又把干空气视为上述混合气体,则大气的状态方程可写为

$$\rho = \rho(p, T, q) \tag{3.8.9}$$

其中 q 为单位质量空气中含有的水汽质量,称比湿. 由于水汽会产生相变,故这种函数关系比较复杂.

同样,海水的状态方程也可写为

$$\rho = \rho(p, T, \zeta) \tag{3.8.10}$$

其中 ζ 为盐度,它等于单位质量海水中溶解盐的质量. 式(3.8.10)的具体形式也较复杂,一种表达为

$$\frac{1}{\rho} = 0.702\,2 + \frac{100(17.527\,3 + 0.110\,1\,T - 0.000\,639\,T^2 - 0.039\,986\,\zeta - 0.000\,107\,T\zeta)}{p + 5\,880.9 + 37.592T - 0.349\,5\,T^2 + 2.252\,4\,\zeta}. \tag{3.8.11}$$

式中各量的单位,p 用巴(bar,1 bar = 10^5 Pa),T 用℃,ζ 用‰,ρ 用个 g/cm^3.

液体的密度通常视为常数,但在考虑热对流问题中,它是温度的函数,并常借公式 $\beta = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial T}$ 而有

$$\rho - \rho_0 = -\beta(T - T_0),$$

其中 ρ_0 是温度 T_0 时密度,β 为热膨胀系数.

(二) 正压流体与斜压流体

由前所述,流体的密度一般是温度、压强等量的函数,这种流体称为斜压流体. 而当密度只是压强的函数时,这种流体称为正压流体. 在正压流体中,等密度面与等压强面是重合的,而在斜压流体中,等密度面与等压强面互相斜交.

完全气体运动时,若过程是绝热的或等温的,则由状态方程,密度与压强关系分别为

$$p = p_0\frac{\rho^\gamma}{\rho_0^\gamma} = c\rho^\gamma, \tag{3.8.12}$$

$$p = p_0\frac{\rho}{\rho_0}, \tag{3.8.13}$$

其中 ρ_0 及 p_0 为一参考点的密度与压强(为常数)，γ 为绝热指数. 上两式表明，这时的气体是正压的. 对不可压流体，因质点密度不变，这时流体也认为是正压的.

(三) 完全气体的内能及熵

取 T、v 为独立物态参量，则态函数内能

$$e = U(T, v)$$

且有

$$\mathrm{d}e = \frac{\partial e}{\partial T}\mathrm{d}T + \frac{\partial e}{\partial v}\mathrm{d}v,$$

再由热力学第一定律及第二定律，有式(3.6.27)：

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{T}(\mathrm{d}e + p\mathrm{d}v) = \frac{1}{T}\left[\frac{\partial e}{\partial T}\mathrm{d}T + \left(\frac{\partial e}{\partial v} + p\right)\mathrm{d}v\right].$$

上式右端为全微分，故有混合导数

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{T}\frac{\partial e}{\partial T}\right) = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{1}{T}\frac{\partial e}{\partial v} + \frac{R}{v}\right),$$

即有

$$\frac{\partial e}{\partial v} = 0,$$

故

$$e = e(T). \tag{3.8.14}$$

这说明，对完全气体，内能只是温度的函数. 又因(3.6.35)，有

$$e = \int c_v \mathrm{d}T.$$

若温度变化范围不大，c_v 可认为是常数，则有

$$e = c_v T. \tag{3.8.15}$$

这就是完全气体的内能表达式.

又由(3.6.32)及(3.6.30)式，

$$c_p = \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}T} + p\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}T}\right)_p = c_v + R.$$

再由(3.6.27)式，

$$\mathrm{d}S = \frac{c_v}{T}\mathrm{d}T + \frac{R}{v}\mathrm{d}v = c_v\left(\frac{\mathrm{d}T}{T} + \frac{R}{c_v}\frac{\mathrm{d}v}{v}\right). \tag{3.8.16}$$

因

$$\frac{R}{c_v} = \frac{c_p - c_v}{c_v} = \gamma - 1,$$

其中 $\gamma = c_p/c_v$ 为绝热指数. 将上式代入(3.8.16)并积分得

$$S = c_v[\ln T + (\gamma - 1)\ln v] = c_v \ln Tv^{\gamma-1} = c_v \ln \frac{p}{R}v^{\gamma}$$

$$= c_v \ln \frac{p}{\rho^\gamma} + \text{常数}, \tag{3.8.17}$$

其中 $\rho = \frac{1}{v}$ 为密度，这就是完全气体的熵表达式.

3.9 初始条件及边界条件

本章前几节介绍了流体运动时所必须满足的方程，以微分形式的流体力学基本方程组为例，总结起来是：

连续性方程

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0. \tag{3.4.9}$$

运动方程

$$\rho \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = \rho \boldsymbol{F}_b + \operatorname{div} \boldsymbol{P}. \tag{3.5.5}$$

$$\left(\rho \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = \rho \boldsymbol{F}_b - \operatorname{grad} p + \mu \nabla^2 \boldsymbol{v}\right). \tag{3.5.9}$$

动量矩方程

$$p_{xy} = p_{yx}, \quad p_{yz} = p_{zy}, \quad p_{zx} = p_{xz} \tag{3.7.16}$$

能量方程

$$\rho \frac{Di}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \varphi + \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T), \tag{3.6.26a}$$

或

$$\left[\rho \frac{De}{Dt} = -p \operatorname{div} \boldsymbol{v} + \varphi + \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T)\right].$$

状态方程是

$$\rho = \rho(p, T), \tag{3.9.1}$$

加上第一章的本构方程

$$\boldsymbol{P} = -p\boldsymbol{I} + 2\mu\left(\boldsymbol{S} - \frac{1}{3}\operatorname{div} \boldsymbol{v} \boldsymbol{I}\right) \tag{1.6.13}$$

共有 12 个方程. 其中包含 12 个未知数，即

$$u, v, w, \rho, p, T,$$

$$p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, p_{xy}, p_{yz}, p_{zx}.$$

(方程中的热传导系数 k，粘度系数 μ 认为已知). 方程认为是封闭的，但求解尚需给出定解条件，即初始条件及边界条件，以确定积分常数.

(一) 初始条件

通常初始条件由 $t = t_0$ 时，各未知量的函数分布给出，如

$$
\begin{aligned}
u &= u(x,y,z,t_0) = u_0(x,y,z,),\\
v &= v(x,y,z,t_0) = v_0(x,y,z,),\\
w &= w(x,y,z,t_0) = w_0(x,y,z,),\\
p &= p(x,y,z,t_0) = p_0(x,y,z),\\
\rho &= \rho(x,y,z,t_0) = \rho_0(x,y,z),\\
T &= T(x,y,z,t_0) = T_0(x,y,z).
\end{aligned} \tag{3.9.2}
$$

当运动定常时，显然，无初始条件问题.

(二) 边界条件

所谓边界条件就是流体力学方程组在求解域的边界上，流体物理量应满足的条件. 例如，流体被固壁所限，流体将不应有穿过固壁的速度分量；在水面这个边界上，大气压强认为是常数(一般在距离不大的范围内可如此)；在流体与外界无热传导的边界上，流体与边界之间无温差，如此等等. 由于各种具体问题不同，边界条件提法千差万别. 但无疑应提得恰当. 所谓恰当，无非一是在物理上是正确的，二是在数学上不多不少，刚好能用来确定积分微分方程中的积分常数，而不是矛盾的或有随意性.

通常流体边界有分为流固交界面和流流(液液、液气)交界面的；也有分为静止的和运动的；也有边界条件是分为关于运动学的和关于动力学的.

以下对边界条件按各类分界面作一般讨论.

1. 流固分界面边界条件

飞机、船舶在空气及水中运动时的流固分界面，水在岸边及底部的流固分界面，均属这一类. 一般而言，流体在固体边界上的速度依流体有无粘性而定，对粘性流体，流体将粘附于固体表面(无滑移)：

$$\boldsymbol{v}\,|_{\text{流}} = \boldsymbol{v}\,|_{\text{面}}. \tag{3.9.3}$$

即，在流固边界面上，流体在一点的速度等于固体在该点的速度. 对无粘性流体，流体可沿界面滑移，即有速度的切向分量，但不能离开界面，即流体的法向速度分量等于固体的法向速度分量：

$$\boldsymbol{v}_n|_{\text{液}} = \boldsymbol{v}\,|_{\text{面}}. \tag{3.9.4}$$

另外，也可视所给条件，给出无温差条件

$$T\,|_{\text{流}} = T\,|_{\text{面}}, \tag{3.9.5}$$

或绝热条件

$$\left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_{\text{固}} = 0, \tag{3.9.6}$$

等等.

2. 液液分界面边界条件

如密度不同的两种液体的分界面就属这一类. 一般而言,对分界面两侧的液体常提条件

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2, \quad T_1 = T_2, \quad p_1 = p_2. \tag{3.9.7}$$

对应力及传导热提条件

$$\tau = \mu_1 \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_1 = \mu_2 \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_2, \tag{3.9.8}$$

$$Q = k_1 \frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_1 = k_2 \frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_2 \tag{3.9.9}$$

其中脚标 1 与 2 分别为两液体的值.

3. 液气分界面边界条件

液气边界面最典型的是水与大气的分界面,即自由面,由于自由面本身是运动和变形的,而且它的形状常常也是一个需要求解的未知函数. 因此就有一个自由面的运动学条件问题. 若设自由面方程为

$$F(x, y, z, t) = 0, \tag{3.9.10}$$

并假定在自由面上的流体质点始终保持在自由面上,则流体质点在自由面上一点的法向速度,应该等于自由面本身在这一点的法向速度.

现在来求自由面上一点 P 在该点的法向速度分量 q_n. 设该点为 $\boldsymbol{r}_0$,自由面在该点的法向单位矢量为 $\boldsymbol{n}$,则经 Δt 时间后,这一点的位置变为 $\boldsymbol{r}_0 + q_n \Delta t \boldsymbol{n}$,且

$$F(\boldsymbol{r}_0 + q_n \Delta t \boldsymbol{n}, t + \Delta t) = 0. \tag{3.9.11}$$

将上式泰勒展开,得

$$F(\boldsymbol{r}_0, t) + \frac{\partial F}{\partial t}\Delta t + q_n \Delta t \boldsymbol{n} \cdot \nabla F = 0. \tag{3.9.12}$$

因 $F(\boldsymbol{r}_0, t) = 0$,故有

$$\frac{\partial F}{\partial t} + q_n \boldsymbol{n} \cdot \nabla F = 0. \tag{3.9.13}$$

又

$$\boldsymbol{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|}, \tag{3.9.14}$$

故

$$q_n = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial t}}{\boldsymbol{n} \cdot \nabla F} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial t}}{|\nabla F|}. \tag{3.9.15}$$

现再设 P 点流体的速度为 $\boldsymbol{v}$,则 $\boldsymbol{v}$ 在 $\boldsymbol{n}$ 上的分量应等于 q_n:

$$-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial t}}{|\nabla F|} = q_n = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{v} \cdot \frac{\nabla F}{|\nabla F|}. \tag{3.9.16}$$

由此得

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla F = 0, \tag{3.9.17}$$

即

$$\frac{\mathrm{D}F}{\mathrm{D}t} = 0. \tag{3.9.18}$$

式(3.9.17)或(3.9.18)就是自由面的运动学条件.

如果在液气边界上考虑表面张力,则在界面两侧,两种介质的压强差与表面张力有关系(1.1.17)式:

$$p_2 - p_1 = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \tag{3.9.19}$$

这是自由面上的动力学条件. 当不考虑表面张力时,有

$$p = p_a, \tag{3.9.20}$$

其中 p_a 为大气压强.

4. 无限远的条件

流体力学中的很多问题,流体域是无限远的. 例如,飞机在空中飞行时,流体是无界的. 如果将坐标系取在运动物体上,这时无限远处的边界条件为

$$\text{当 } x \to \infty \text{ 时}, u = u_\infty, \quad p = p_\infty.$$

其中脚标∞表示无穷远处值.

3.10 流体力学的理论模型

本章根据基本物理定律,在连续介质假设的基础上,建立了流体运动时所应满足的基本方程组. 由于这些基本物理定律是普遍成立的,因此,这些基本方程具有广泛的适用性. 严格说来这个方程组通常并不封闭,即方程中的未知数多于方程数. 为了求出理论解,必需根据情况再提出一些符合或接近实际的假设,例如由斯托克斯假设引入了牛顿流体模型,由完全气体假设,引入了完全气体模型,从而在某些条件下(如粘度系数 μ、导热系数 k 为已知),方程组可以获得封闭.

但是,即使方程组已经获得封闭,求方程的解仍然不是轻而易举的. 由于方程的非线性特征及方程中变量的互相耦合,使得求解这种一般的方程组几乎成为不可能,因此还必须根据具体问题的特点,抓住问题的主要方面,忽略次要方面,必要时作进一步的假设、简化和近似,设计出一个合理的理论模型. 所谓合理,就是一方面要符合物理定律,另一方面又要易于求解,并使解能够描述现象的主要特征. 由此看出,设计出一个合理的理论模型,是解决流体力学问题的重

要环节.

本节将为建立这种理论模型作一般性说明,其中涉及如下7类模型.

(一) 粘性流动与无粘性流动模型

1. 粘性流动模型

第一章曾经提到,流体的粘性是流体的一种物理特性,它表示流体各部分之间动量传递的难易程度,反映了流体抵抗剪切变形的能力. 实际流体都是有粘性的,流体的粘性用粘度系数 μ 来衡量,有些流体 μ 值很大,如蜂蜜、甘油、重油等;有些流体 μ 值则很小,如空气和水.

粘性流体是一切真实流体的模型,因此,它具有普遍的意义.

历史上,牛顿通过实验首先提出粘性流体的剪应力公式,为粘性流体力学的发展创造了条件. 但由于个问题的复杂性,此后长期没有得到发展. 直到1823年L.纳维和G.G.斯托克斯分别建立了不可压与可压粘性流体运动方程组,粘性流体力学才有大的发展. 此后,边界层、湍流理论的研究就普遍开展起来了.

虽然流体的粘性是用粘度系数来衡量,但是粘度系数大的流体未必当作粘性流动来处理. 依牛顿公式(1.1.5),粘性应力与粘度系数及速度梯度有关. 因此,虽然流体的粘性系数较大,但如果流场的速度梯度很小,剪应力仍然不大,就可以把它当作无粘性流动来处理. 相反,如果流体的粘性系数较小,但流场的速度梯度很大,则仍有必要把它当作粘性流动来处理. 例如,在大气的边界处,由于常常具有较大的速度梯度,形成一个边界层,在边界层内,虽然大气的粘性系数较小,但不把它当作无粘性流动,而将它视为粘性流动. 在流体中运动的物体边界附近,也有类似的情况.

粘性的考虑使方程求解的困难增加,但它存在两个极端情况:一是有极大的粘性,以致在方程中粘性力比惯性力大得多,这时非线性惯性力项可予忽略,从而使方程简化,且求解变为较容易. 另一极端情况是粘性极小,这时似乎可忽略粘性效应,但方程中粘性项是导数最高阶的项,略去粘性意味着降低方程阶数,从而不能满足方程的全部边界条件,无法得到解. 这是一个很大的矛盾.

1904年,普朗特提出了边界层理论,终于回答了这个问题. 他指出,流动将分为两个区域,在远离边界以外的区域中(小粘性),粘性效应可予忽略,并用无粘性流体理论求解. 而在靠近边界的一薄层区域中,粘性效应不可忽略,应利用粘性流动理论求解. 这样,边界层理论不仅给出了正确的数学提法,而且也用粘性流动理论解释了在这种情况下阻力的存在.

湍流是粘性流体流动中的一个重要方面. 实验表明,流体流动有两种流态,层流和湍流. 自然界很多层流运动,常常是不稳定的,稍有扰动,层流立即转变为湍流,湍流运动与层流的重大差别是在它的不规则性和输运能力的剧烈增大. 但是由于湍流运动的复杂性,其发生机理至今仍不清楚. 目前,对湍流的研究主

要通过湍流的平均运动和涨落运动求解粘性流体运动基方程.

此外,通常将粘性流体中符合牛顿粘性定律的流体,称为牛顿流体;不符合牛顿粘性定律的流体,称为非牛顿流体. 非牛顿流体力学已成为另一专门学科.

粘性不可压缩流体的运动通常用纳维－斯托克斯方程组描述

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \\ &\rho \frac{\mathrm{D} \boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t} = \rho \boldsymbol{F}_{\mathrm{b}} - \operatorname{grad} p + \mu \nabla^2 \boldsymbol{v}, \\ &\rho \frac{\mathrm{D}e}{\mathrm{D}t} = \phi + k \nabla^2 T. \end{aligned} \tag{3.10.1}$$

粘性流体流动的内容将在第八和第九章介绍.

2. 无粘性流动模型

粘性的考虑常给分析流体运动带来很大困难,通常为避开这个困难,对于那种粘性效应不十分显著的流动,可忽略其粘性效应,这将既不引起对流动图像主要特征的太大偏差,又可使得对流体运动的分析带来简便. 这种粘性效应被忽略的流动,常常称为无粘性流动.

历史上,正是由于上述原因,早在欧拉时代,无粘性流动的研究,包括无粘性流动基本方程组,平面和空间无旋运动,水波运动等,就已开始,并得到极大的成功.

水波在河中传播时,在较长的距离上,仍不消衰. 大气在高空中运动时,长驱直入,常常跨越数千公里. 这表明在这类流动中,粘性并不起主要作用. 因此将其粘性略去,以便可分析简便且能得到其主要的运动规律.

与粘性流动类似,通常并不是粘度系数小就认为是无粘性流动,只有当粘度系数很小而速度梯度不大,或者当速度梯度很小,而粘度系数不大,这时粘性应力都将是小的,就可把流体当作无粘性流动. 这就是说能否忽略粘性效应,既要看粘度系数的大小,还得看流场中的流动情况. 这样,虽然空气和水的粘度系数都是小的,但能否视为无粘性流动,还得看流场中速度梯度的大小.

采用无粘性流动模型,就形成了无粘性流体的流体力学理论. 这一理论在解释很多实际问题如水波、机翼升力、诱导阻力等方面,起到了重要的作用. 但它不能解释物体在流体中运动的阻力及管道和渠道中压力损失等一类重要问题,对这类问题,无粘性流动模型与实际流体有较大差距.

无粘性不可压缩流体的运动通常用欧拉方程组描述

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \\ &\rho \frac{\mathrm{D} \boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t} = \rho \boldsymbol{F}_{\mathrm{b}} - \operatorname{grad} p, \end{aligned} \tag{3.10.2}$$

无粘性流体流动的内容将在第四、第五、第六章介绍.

(二) 可压缩流动与不可压缩流动模型

1. 可压缩流动模型

从第一章知道,流体的可压缩性是,在外力作用下流体的体积或密度发生改变的性质. 流体的可压缩性通常用等温压缩系数来衡量,如所周知,流体都是可以压缩的,相对来说,液体的可压缩性比较小,气体的可压缩性比较大.

可压缩流体运动的研究开展得比不可压缩流体晚,真正开始是在斯托克斯建立了可压缩流体运动方程组之后,并在 20 世纪得到极快的发展.

虽然流体的可压缩性用等温压缩系数来衡量,但并不是说等温压缩系数大的流体流动就是可压缩流动. 依(1.1.1)式,

$$\gamma_T = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T \tag{3.10.3}$$

上式可写为

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} \approx \gamma_T \Delta p, \tag{3.10.4}$$

这表明,压缩性的影响依赖于等温压缩系数的大小,和流体中压强变化的大小. 当等温压缩系数不小而压强变化很小,或者压强变化不小而等温压缩系数很小时,压缩效应都是小的,这时流体就可视为不可压缩的. 相反,当等温压缩系数不大而压强变化很大,或者压强变化不大而等温压缩系数很大时,压缩效应都将变得很大,这时流体就应视为可压缩的.

空气在运动中的压力变化常常由速度变化决定,以后将会看到,(3.10.4)式可由下式代替:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} \approx \frac{\gamma}{2}\left(\frac{v}{a}\right)^2, \tag{3.10.5}$$

其中 γ 为绝热指数,a 为声速

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S}. \tag{3.10.6}$$

由此式看到,只要流体速度 v 远小于声速,那么 $\Delta\rho/\rho$ 就是小的(当流体不可压时,声速 a 为无穷,$\Delta\rho/\rho=0$). 习惯上,常采用 $v/a=0.3$ 为可压缩与不可压缩流动的分界. $v/a<0.3$,流体认为是不可压缩的,$v/a>0.3$,认为是可压缩的. 空气的声速为 340m/s,那么,速度小于 110m/s 的空气流动,就认为是不可压缩的,这对几乎所有的自然大气运动,无疑都是满足的. 而速度大于 110m/s 的空气流动(如高速飞行物体在空气中),就可认为是可压缩的.

考虑流体为可压缩时,流体的运动将变得复杂得多,这是由于,第一,流体密度变为非常数,密度的变化不仅将引起流体热状况的变化,同时它又反过来影响流体的力学状态. 在数学上,方程中未知量多了一个,为求解得再引入其它方程,于是方程组中出现了状态方程及能量方程与未知数 T(温度). 第二,连续性方程变为非线性的,使求解困难. 第三,在某些情况下,可能产生物理量的间断

面，通常称为激波，流体质点经过激波，熵、密度、压强、温度和速度等都将产生一个急剧(跳跃)的变化.

在可压缩流动中，将以流体速度大于、接近、小于声速，把流动分为超声速流动、跨声速流动、亚声速流动，这些流动的性质对它们的数学处理将有很大的不同.

可压缩无粘性完全气体的运动可用下述方程组描述(通常不考虑质量力，)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \\
&\rho \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t} = -\nabla p, \\
&p = \rho R T, \\
&\rho \frac{\mathrm{D}i}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{D}p}{\mathrm{D}t} + \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T).
\end{aligned}
\tag{3.10.7}
$$

2. 不可压缩流动

历史上，不可压缩流动的研究比可压缩流动早得多，伯努利、欧拉、拉格朗日等都在这方面作出了很大贡献.

在处理实际问题中，为了简便，有时将流体的密度近似看为不变的，称为不可压缩流体. 所谓密度视为不变，实际上是指相对密度变化 $\Delta\rho/\rho$ 很小. 液体在很大的压强变化下，密度的变化是很小的，所以常常将液体视为不可压缩的(然而，在水下爆炸、水锤问题中，必须把液体视为可压缩的). 在一些情况下，也把气体视为不可压缩的，已如上所述.

采用流动为不可压缩的，将使方程组有很大简化，这时取密度为常数，方程组将减少一个未知量.

(三) 非定常流动与定常流动模型

1. 非定常流动模型

一切随时间变化的流动，都是非定常流动. 其中除了随时间变化极慢的流动可近似为定常流动外，都必须考虑其非定常效应，这时不仅产生不定常变化项，$\frac{\partial}{\partial t}\neq 0$，而且当流动变得太快时，可能产生新的物理现象. 例如，管道水流突然因阀门关闭，产生很强的惯性作用，水被压缩(水常被视为不可压缩的)，形成压力波在管中的传播，这就是通常所称的水锤(击)现象.

2. 定常流动模型

流体的运动通常是随时间变化的，这是容易想象的，但有些流体运动，随时间变化不大，例如，河水在相当长一段时间内，流动几乎一样；飞机在作等速直线运动时，在飞机上的观测者来看，流动也几乎不变. 对于这种流动，常常认为是定常的，即流场流态不随时间变化. 用数学表示为$\frac{\partial}{\partial t}=0$. 由于对定常流动的研

究要简单得多,甚至有时在定常流动的条件下,微分方程可直接积分出来,因此,定常流动是一种简化模型.

非定常流动有时可以转变为定常流动,例如物体在水面的等速运动,在岸边看是非定常流动,但在物体上看则是定常流动.

虽然,为了方便,常常是把非定常流动设法当作定常流动处理,然而,在流动问题的数值计算中,却宁愿把定常流动当作不定常流动处理,以非定常流动逼近定常解,可避免直接解定常边值问题的困难.

(四) 有旋流动与无旋流动模型

1. 有旋流动模型

第一章曾经指出过,流场中流体质点有旋转的流动称为有旋流动. 有旋流动在自然界是普遍存在的,澡盆涡,大气中的台风,绕物体流动的尾涡,等等,都是一种有旋运动.

欧拉早就对无旋流动作了研究,并指出还可能有另一种流动. 但是直到亥姆霍兹才对有旋流动作了研究,他成了研究有旋流动的奠基人.

表征有旋运动的物理量称为涡量,也即速度旋度,其大小是流体质点旋转角速度的两倍. 涡量高度集聚的区域就是涡. 研究有旋运动主要就是研究涡的产生、运动、发展以及涡与涡、流等之间相互作用的. 后面将指出,如果流体是斜压的,或者作用于流体的力是非有势的,或者流体是有粘性的,那么,在流体中就将产生涡. 这说明了涡的普遍存在. 飞机翼面附近的薄层流体(边界层)中由粘性产生的涡量,导致飞机产生了升力. 有旋流动与大气、海洋中的很多现象也密切相关,大气、海水既是一种斜压流体,而且受到科氏力的作用(虽然很小,但对这种大尺度的运动影响很大),再加上大气、海水的粘性,使得在大气、海洋中产生大大小小各种尺度的涡旋.

我国著名流体力学家陆士嘉曾经指出:"流体的本质就是涡,因为流体经不住'搓',一'搓'就'搓'出了涡."可见涡的普遍存在以及涡的重要性,虽然以往对涡的研究比较慢,但正因为涡的重要性和对涡的未知,目前对涡的研究"正处在(第二个)黄金时期".

有旋流动的内容将在第五章中介绍.

2. 无旋流动模型

无旋流动是流场中各质点无旋转的流体运动. 从上可知,自然界中无旋运动很难见到,因为流体通常是斜压的,有粘性的,科里奥利力(非有势力)也可能在起作用,这都将导致产生涡. 然而,在一些假设下或某种近似时,流动可以视为无旋的. 后面将会看到,无粘性正压流体在有势力的作用下;均匀来流绕物体的流动及从静止开始的流动都将是无旋的. 这样,例如机翼绕流,水波运动等都认为是一种无旋运动,这类流动在工程中经常遇到,具有重要意义. 在无旋的条

件下,就有速度势存在,再在流体不可压时,得到了速度势的拉普拉斯方程,数学上有成熟的处理方法,因此无旋运动是一种有广泛应用的简化模型.

无旋流动的内容将在第六章中介绍.

(五) 重力流体与非重力流体模型

在流体运动中,重力的作用一般是要考虑的. 对于低速运动的流体,惯性力较小,重力是影响流体运动的主要因素,尤其是在海洋或大气运动中,更是如此. 此外,在有自由面及因密度分布不均匀而引起的流体运动中,重力也起主要作用. 但是,在高速气流运动中,由于惯性力比重力大得多,重力常常被忽略.

(六) 一维、二维与三维流动模型

1. 一维流动模型

严格说所有流动参数(速度、密度、压强等)仅取决于一个位置坐标(和时间)的流动,称一维流动. 沿管道的流动不一定是一维流动,因为在管截面上流动参数可以是不均匀分布的. 只有当参数均匀分布或者按截面计算平均流动参数的管道流动,才是一维流动. 流体在细管中的运动,空间辐射状流动等,都是近似的一维流动.

2. 二维流动模型

所有流动参数仅取决于两个位置坐标(和时间)的流动是二维流动.

流体力学中常用两种坐标来讨论二维流动. 一种是平面流动,如一维波动、平面物体绕流都是平面流动,另一种是轴对称流动,如子弹、水雷等轴对称物体沿轴线方向的流动.

3. 三维流动模型

所有流动参数取决于三个位置坐标(和时间)的流动,是三维流动,这种流动都较为复杂,有时就简化为二维情形,如对细长体(三维),常取二维近似求解.

(七) 绝热流动与等熵流动模型

1. 绝热流动模型

在许多流动系统中均伴随有传热现象,热量的来源既可以是该系统与其外界环境之间的热交换,也可以是流动系统内部,由于物理与化学作用而产生的,如介质的热辐射,放电(电能转化为热能)和化学反应(化学能转化为热能)等. 一个流动系统如果没有这类热量输入或生成,而且流动系统内部也不存在热传导现象,这样的流动称为绝热流动.

流体的粘性作用与流动中出现的激波也能使流动产生机械能耗损,从而转变为热能,这是绝热流动所容许的. 并将没有机械能耗损的绝热流动称为可逆绝热流动,而将存在机械能耗损的绝热流动称为不可逆绝热流动.

严格的绝热流动是很难实现的,即使没有热量从外部传入或在内部生成,流动系统中也往往伴有不均匀的温度分布,这就会导致热传导现象的出现. 一个

流动系统中如果传入与生成的热量都非常小，而且热传导的影响也可忽略不计，则可近似地认为是绝热流动. 例如流体通过激波时，由于所需的时间非常短暂，以致传热机制尚未充分形成，故可近似为绝热流动. 又如声波的传播也可采用这一近似. 试考虑描述声波运动的能量方程(3.6.26b)

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + \varphi$$

其中惯性项 $\rho c_p \frac{DT}{Dt}$ 的主要项为 $\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$，它的数量级为 $\rho c_p \frac{aT}{\lambda}$，$a$ 与 λ 分别为声波速度与波长，而热传导项 $\operatorname{div}(k \operatorname{grad} T)$ 的数量级为 $k\frac{T}{\lambda^2}$. 惯性项对热传导项的量级比为 $\frac{\rho\lambda a}{\mu}Pr$，其中普朗特数 $Pr=\frac{c_p\mu}{k}$. 对于空气 $Pr\sim0.71$；$\frac{\mu}{\rho}=1.57\times10^{-5}\mathrm{m^2/s}$，$a=340\mathrm{m/s}$，和人耳可闻的声波波长一般在 $10^{-2}\sim20\mathrm{m}$ 的范围内，现取 $\lambda=10^{-2}\mathrm{m}$，则这一量级比值约为 1.5×10^5. 故热传导项的作用可以完全忽略不计，而将运动视为绝热的.

2. 等熵流动模型

在流动系统中，如果每个流体质点的熵在运动过程中保持不变即

$$\frac{DS}{Dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla S = 0$$

则此流动称为等熵流动. 在这类流动中，虽然每个流体质点的熵保持不变，但不同流体质点的熵可以有不同的值，因而整个流场内的熵并非为同一常数. 如果流场在初始时是匀熵的(即各流体质点的熵相同)，则在以后的任何时刻都是匀熵的，即 S 为一常数. 这类流动可称为匀熵流动，但也有人称为等熵流动.

考虑用熵表示的能量方程(3.6.27)

$$\rho T\frac{DS}{Dt} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + \varphi$$

要严格保持 $\frac{DS}{Dt}=0$ 有两种可能，一种是热传导项与粘性耗散项相互抵消，这在实际上是很难实现的，另一种是热传导项与粘性耗散项均为零. 这意味着可逆的绝热流动是等熵流动，而不可逆的绝热流动是非等熵流动. 换句话说，只有能忽略流体粘性与热传导的连续运动才可近似看为等熵流动.

对于比热为常数的完全气体. 熵的表达式(3.8.17)为

$$S = C_v \ln\frac{p}{\rho^\gamma} + 常数\ C.$$

从等熵方程 $\frac{DS}{Dt}=0$，可得到 $\frac{D}{Dt}\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right)=0$，故描述无粘性可压缩完全气体作等熵运

动时的方程组为：

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}+\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0,$$
$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}=-\frac{1}{\rho}\nabla p,$$
$$p=\rho RT, \tag{3.10.8}$$
$$p=C\rho^{\gamma}.$$

与此有关的内容将在第十章介绍

小　结

流体力学基本方程组是所有牛顿流体运动都必须遵循的，因此它具有基本的重要性．

流体力学基本方程组通常采用欧拉法表示，相应地必须采用控制体，而基本物理定律是对系统而言的，因此必须建立体积分的随体导数公式．

用微六面体元建立微分形式的基本方程，是流体力学的常用的方法．利用这一方法可以掌握很多概念和方法细节．建立积分形式的基本方程的方法则较简捷、且带有普遍性（不像建立微分形式的基本方程组那样取一特殊体元）．微分形式及积分形式的基本方程在应用中各有其优缺点．

连续性方程、运动方程、能量方程分别是质量守恒律、动量平衡律、能量守恒律的数学表示式，它们是普遍成立的，是所有牛顿流体运动都必须遵循的．但由于方程的封闭性及非线性性质等原因，求解是困难的．

利用基本方程组来解决具体问题时，初始条件及边界条件也是必不可少的，在具体问题中，这些条件千差万别、必须灵活应用．

为了能从方程组求解，介绍了一些从理论上研究流体运动的简化模型，如无粘性流体、不可压缩流体、定常与无旋流动等．

*实验中的发现

（三）连续性原理

L.达.芬奇（1452—1519）是一个多才多艺的奇才，他很注意观察一切自然现象，也非常重视实验方法，他对流体力学的发展做出过很多贡献．大约在1500

年左右．他就提出了定常流动的体积流量守恒原理，他说："沿河流的任何一部分，在相同的时间内，应通过相同流量的水，不管河流的宽度、深度、坡度、粗糙度和曲折度如何"，他还发现对"一深度均匀的河流，窄的地方较宽的地方水流速度要快"．他更风趣地用一类比来说明这一原理．他说"譬如一队训练有素的士兵要通过一条宽窄不一的大街．这街的宽度可以是 4m、8m 甚至 16m，如果通过时要求要保持一定的密集度和要利用一切可以利用的街宽，则士兵通过时，假定在街宽的部分走 1 步，中等部分须走 2 步，而窄的部必须走 4 步，这明确说明在相同时间内要通过相同的数量，速度与街宽必须成反比"．他还说"对一给定的小孔，高速度较低速度流出的水更多，速度增加 1 倍，在相同时间内，流出的水也增加 1 倍，速度增加 3 倍时，流出的水也增加 3 倍，这表明：横截面一定，流量与速度成正比"．可惜这些流体力学中的基本原理，当时并未引起人们的注意，直到一百多年后的 1628 年才又被 B.B. 卡斯特里（1577—1644）重新发现．他把它叙述为"虽然沿河流的各横截面并不相等，但在相同时间内，流过这些横截面的流量应相等"，接着他还解释说"沿河流 C，有两个横截面 A 和 B，河水由 A 流向 B，我说在相等时间内，流过它们的流量应相等，因为如果流过 A 的流量大于流过 B 的，则在河流的 A 与 B 之间会使积水不断增加，这显然是不正确的．但如果流出 B 截面的水多于流入 A 截面的水，则 A 与 B 之间会不断减少水，这也是错误的．所以，在相等的时间内，流过 B 截面的水流量应等于流过 A 截面的水流量，这一原理现称为达·芬奇－卡斯特里原理．

水利工程师们将这一原理广泛地应用于解决各种实际问题．如明渠流动与江河流动等．1744 年 J.R. 达朗伯（1717—1783）根据这一原理，应用数学方法，导出定常不可压缩流体微分形式的连续性方程．11 年后，L. 欧拉（1707—1783）又将这一原理应用于一根流管，并用质量去代替流量即沿流管的质量应守恒．随即根据这一新原理在直角坐标系中取微六面体导出了非定常可压缩流体微分形式的连续性方程．应当注意对均质不可压缩流体，体积流量守恒原理即质量守恒原理．

（四）能量守恒原理

能量守恒这一宇宙普遍规律是在不同国家由不同学科的科学家经过长期的共同努力和不懈的观察，实验与探索后才逐渐发现和完善的．它的起源是在力学．约在公元一世纪，希腊科学家希罗（亚历山大）首先明显地应用虚功（即势能守恒）原理来解释与讨论单个或多个滑轮提升重物的问题．约 13 世纪中叶，法国数学家 N. 乔丹纳斯第一个明确地利用直臂与曲臂杠杆和斜面来阐述与证明虚功原理．16 世纪意大利力学家 G. 乌巴尔德（1545—1607）和物理与天文学家 G. 伽利略（1564—1642）分别将虚功原理应用于杠杆、滑轮和斜面上一物体与通过滑轮相连的另一悬挂物体之间的平衡问题．

1638 年当伽利略研究自由落体,单摆和物体沿斜面运动时发现物体的速度只能通过高度变化得到,而且物体下降所获得的速度正好能使它返回自原来的高度. 1673 年荷兰数学与物理学家 C. 惠更斯(1629—1695)将伽利略的单摆实验推广至复摆情况,结果发现在重力作用下,复摆重心的上升高度不能高于其下降的高度. 1686 年德国数学家 G. W. F. 莱布尼兹(1646—1716)在进行落体实验后,提出用运动能 mv^2 来度量物体的运动. 这样,伽利略与惠更斯的实验结果意味着运动能守恒. 1690 年惠更斯进行二相同弹性体的碰撞实验. 结果发现碰撞前后的运动能 mv^2 不变,他还指出这一原理可适用于其它许多情况包括液体的运动. 1738 年瑞士物理与数学家 D. 伯努利(1700—1782)将此原理应用于容器出流获得了著名的伯努利定理.

当莱布尼兹研究自由落体时,曾试图比较与探索动能与势能之间的关系,结果发现它们的量纲是相同的. 1735 年 D. 伯努利的父亲 J. 伯努利(1667—1748)表示支持运动能守恒的观点,同时,进一步指出如果运动能有变化,可能是转化为其它形式的能. 可见莱布尼兹与伯努利等人的研究均促使他们考虑动能与势能之间的互换性. 到 1750 年前后,一个理想与孤立的机械系统在重力作用下,它的机械能(即动能与势能之和)守恒原理已牢固确立.

在非弹性碰撞中显然运动能是不守恒的. 但对失去的运动能走向何方却有不同的解释,有人认为失去的运动能不会毁灭,可能是被各种阻碍或制约所吸收,也有人认为转化为弹性势能等. 但却没有人将这一现象与热效应联系起来.

1798 年美国物理学家 B. C. R. 汤姆森(1752—1814)在德国监制大炮时发现所用钻头越钝,所钻下的金属削越少,而炮膛所产生的热量却越多. 他还把炮筒放在水槽里,让几匹马推动一支钝钻头钻孔,钻了两个多小时,槽内的水甚至沸腾起来,这表明热的来源只能是钻头的运动. 1799 年英国化学家 S. H. 戴维(1778—1829)在真空中用一钟表机械使两个冰块相互摩擦,并使整个仪器保持在 0℃. 几分钟后,冰吸收热融化成水,这些实验均说明机械运动可以产生热能. 1800 年英国科学家 W. 尼科尔森(1753—1815)和医生卡莱尔通过电解水实验证明电可以引起化学反应,即电能可以转变为化学能. 1820 年丹麦物理学家 J. C. 奥斯特通过实验证明电能可以转化为磁能. 1821 年德国物理学家 T. J. 西贝克(1770—183?)制成温差电偶,证明热能可以转化为电能. 1831 年英国物理与化学家 M. 法拉弟(1791—1867)用实验证明磁能可以转化为电能. 这些实验均充分表明:自然界的各种运动形式以及它们所表征的能量形式都是可以相互转换的.

1840 年德国内科医生 J. R. 迈尔(1814—1878)随船从荷兰至东印度,在热带地区发现患病海员的静脉血液较在欧洲时更红,在法国化学家 A. L. 拉瓦锡

(1743—1794)的呼吸燃烧理论的启示下,他认为这是由于血液中含氧较多的缘故. 因为维持人的体力与体热的来源是食物,而食物的消化过程犹如无机物的燃烧一样,在热带维持体热所需的能量较少,静脉血液中所余留的氧气较多,故更红. 这样,他就发现生物体内的能量输入与输出是平衡的,同时和机械能一样,化学能也可转化为热能. 他的这一论文是 1842 年发表的,但未引起注意,20 年后,才受到英国物理学家 J. 廷德尔(1820—1893)的高度评价.

从 1840 年英国物理学家 J. P. 焦耳(1818—1889)长期坚持不懈地用各种方法进行电能与热能,电能与机械能和机械能与热能之间的转换实验,并比较精确地测定出电热当量值和热功当量值. 1847 年他的实验结果公布后未受到重视,二月后,英国物理与数学家 W. 汤姆森(1824—1907)给予充分肯定后才引起轰动.

同在 1847 年,德国物理与生理学家 H. 亥姆霍兹(1821—1894)独立地发表了与焦耳的内容相近的论文,全面地阐述了各种能量形式之间的等价关系,并用数学的形式表达出一般的能量守恒原理,而热力学第一定律仅为能量守恒原理在热力学中的具体体现. 经过至少二百多年的时间和大约 60 多位科学家的共同努力,一般的能量守恒与转换原理终于确立.

习　题

3.1 写出下列各量的数学表达式:

(1) 单位时间内以 $\boldsymbol{n}$ 为法向的面积元 dA 上的流体体积流量;

(2) Δt 时间内经固定不动空间 τ 的表面 S 净流入 τ 内的质量;

(3) 流体体积 τ 内的动量、动能的随体导体.

3.2 求各种坐标系下的连续性方程(用微六面体):

(1) 柱坐标;

(2) 球坐标;

(3) 一般曲线坐标.

3.3 下列各种流体运动中,哪个方向速度分量为零,然后写出连续性方程:

(1) 流体质点在每一平行平面上作径向运动;

(2) 流体质点在空间作径向运动;

(3) 流体质点在每一个都交于 z 轴的平面上运动;

(4) 流体质点在同心的球面上运动;

(5) 流体质点在共轴的圆柱面上运动,若再加上无轴向运动,又如何?

(6) 流体质点在共轴且有共同顶点的锥面上运动.

3.4 二维不可压缩流体具有速度分量为

$$v_R = c_1\left(1 - \frac{3}{2}\frac{R_0}{R} + \frac{1}{2}\frac{R_0^3}{R^3}\right)\cos\theta, \quad R \geqslant R_0 > 0,$$

$$v_\theta = -c_1\left(1 - \frac{3}{4}\frac{R_0}{R} - \frac{R_0^3}{4R^3}\right)\sin\theta$$

$$v_\lambda = 0,$$

其中 R_0 及 c_1 为任意常数,问连续性方程是否满足?

3.5　在流体中取一任意形状的控制体,由此求连续性方程.

3.6　流体作有自由面的三维波动,底面为平面且流体等深,波动振幅小,求连续性方程.

*3.7　对于速度场

$$v_i = \frac{x_i}{1+t}, \quad i = 1,2,3,$$

证明,$\rho xyz = \rho_0 abc$ 其中 a,b,c 是拉格朗日变量,ρ_0 是初始密度;$\rho_0 = \rho(a,b,c,0)$.

3.8　证明速度场

$$v_i = \frac{Ax_i}{R^3}, \quad i = 1,2,3$$

满足不可压流体的连续性方程,式中 A 为常数,$R^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

3.9　证明:若流体不可压,存在一函数 ψ,恒满足维连续性方程,ψ 由二维速度 u、v 决定,

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

若

$$u = x^2y + y^2, \quad v = x^2 - y^2x,$$

求 ψ.

3.10　一等截面管子 ABC 在 B 处成直角,AB 竖直,BC 水平 $AB = BC = a$,管内充满液体,液体是无粘的. 密度 ρ 为常数. 证明,当打开 C 处阀门的瞬时,垂直管中的压强立即降低一半. 设大气压略去不计.

*3.11　一中空且压强为零的球被无限液体包围,在无限远处,有压强 π 作用,证明,若中空球突然破灭时,液体中任一距球心 R 处的压强立即降为

$$\pi\left(1 - \frac{a}{R}\right),$$

其中 a 为球半径,并求内液面此后的运动规律. 不计质量力,密度认为是常数.

3.12　一球被无限液体包围,在无限远处有压强 π 作用,证明,当球面以某种规律运动时,球面上任一时刻的压强为

$$\pi + \frac{1}{2}\rho\left[\frac{\mathrm{d}^2R^2}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\right)^2\right].$$

*3.13　一无限流体被单位质量力为 $\mu r^{-3/2}$ 的力作用,方向指向原点,若开始流体静止且其中有一空腔 $r = c$,证明,在过 $\left(\frac{2}{5\mu}\right)^{\frac{1}{2}} c^{5/4}$ 时间后,空腔将被液体充满.

*3.14　二无限长环状液体在 $r = a$ 及 $r = b$ 之间,外柱面 $r = a$ 处有压强 π,内柱面突然破灭,证明,设 v 是内柱面 $r = r$ 处的速度,则

$$v^2 = \frac{2\pi}{\rho r^2} \frac{b^2 - r^2}{\ln[(r^2 + a^2 - b^2)/r^2]}.$$

提示;设边条件;当 t 时外柱面 $r = R$ 上,$v_R = \dot{R}$,$p = \pi$,内柱面 $r = r$ 上,$v_r = \dot{r}$,$p = 0$,且有 $R^2 = r^2 + a^2 - b^2$.

*3.15　两同心球面 $R = a$ 及 $R = b(<a)$ 间充满液体,外球面上有压强 π 作用,若内球突然收缩成另一同心球面时,求此时内球面的速度及作用于此球面的冲量.

3.16　体积为 $\frac{4}{3}\pi a^3$ 的液体充满于两同心球面之间,外球面有压强 π 作用,无质量力,内球面压强为零. 开始时液体静止,内球面半径为 $2a$,证明,当内球面半径变为 a 时,其速度为

$$\left(\frac{14}{3} \frac{\pi}{\rho} \frac{2^{1/3}}{2^{1/3} - 1}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

3.17　不可压流体的质点依牛顿引力定律被吸引向一固定中心,若给定流体的体积 τ 及单位距离的引力等于 μ. 求 $p = 1$ 的等压面方程式.

3.18　一团流体在同心球面 $R = a$ 与 $R = b$ 之间,外球 $R = a$ 上有压强 π 作用,内球突然收缩成另一球. 求此时速度及作用于球面上的冲量.

*3.19　两同心球面 $R = b$ 及 $R = a(<b)$ 之间充满液体,内球充满气体,其压强依波义耳定律 pv = 常数变化. 外球面有压强冲量作用,单位面积上的值为 $\bar{\omega}$,证明,当液体开始不动时,内球面的半径为

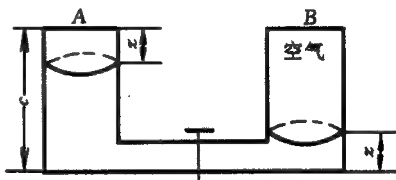
$$a\exp[-\bar{\omega}^2 b/2a^2 p\rho(b - a)].$$

其中 p 为气体初压强.

3.20　两封闭圆柱下部有管相通. A 圆柱放满水,B 圆柱内放有空气,若打开开关,则水将流向 B 柱. 设此柱体内空气等温压缩,证明,在此柱内水上升的最大高度由

$$cz - z^2 - ch\lg\frac{c - z}{c} = 0$$

确定. 其中 c 为圆柱高,h 为压强 p_0 的压强高度;$p_0 = \rho gh$,p_0 为 B 柱原空气压强.



3.20 题图

3.21　设在直径为 D 的圆管入口处均匀不可压流体以截面上均匀的速度流入,而在离入口为 1 的出口截面上以速度分布

$$u = U\left(1 - \frac{2r}{b}\right)^{1/7}$$

流出,还测知,出入口截面压强降低了 Δp. 试求长这段管壁所受的流体粘性作用力.

3.22　用机械能方程解例 3.5.

3.23　在有势力作用下,正压无粘流体作定常运动,用机械能方程证明

$$\frac{v^2}{2} + P + \pi = c(\psi),$$

其中 π 是力势,c 在流线上为常数.

3.24　在有势力作用下,正压无粘流体作无旋运动,用机械能方程证明

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + P + \Pi = f(t),$$

其中 φ 为速度势：$\boldsymbol{v} = \nabla\varphi$.

*3.25　当控制体变形且作任意运动时，求以控制体表示的连续性方程.

第四章 流体的积分关系式及其应用

在第三章中建立了描述流体运动的积分与微分形式的方程组. 在一定条件下,有些微分形式的方程可以进行直接积分,获得各流动参数之间所应满足的简单代数关系式. 而积分形式的方程组,对于有限控制体积,在一定假定情况下,也可给出各流动参数之间的简单关系式. 这些关系式在解决生产和生活问题中起着极其重要的关键性作用.

本章的主要内容是导出这些关系式,并列举大量的应用例子. 4.1 至 4.3 节为无粘性流体的兰姆－葛罗米柯方程在流体正压、体力有势的条件下,对定常与无旋流动分别给出伯努利与拉格朗日积分和它们的应用. 4.4 至 4.7 节是将积分形式的质量、动量、动量矩和能量守恒方程直接应用于流体的有限控制体积以获得简单的表达式,并用以解决众多的实际问题. 4.8 节举出了几个综合应用这些关系式的例子.

4.1 无粘性流体运动方程的进一步简化

对无粘性流体,从 3.5 节的(3.5.13)式有矢量形式的兰姆－葛罗米柯运动方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\ .\ \nabla)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{F}_{\mathrm{b}}-\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}p \tag{4.1.1a}$$

或

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\mathrm{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right)+\mathrm{rot}\ \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{F}_{\mathrm{b}}-\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}p \tag{4.1.1b}$$

考虑到许多流体运动都是在地球上或它的附近进行的,即在重力场内进行,这时,体力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{b}}$ 是有势的,随之可定义一体力势 π 使

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{b}}=-\mathrm{grad}\pi \tag{4.1.2}$$

其中取负号是因为重力沿垂直坐标轴的负方向. 同时还注意到,许多流体在通

常情况下,密度几乎为一常数,或仅是压强的函数(等温或绝热过程),即流体为正压的,这时,可定义一正压函数 P,使

$$P = \int \frac{\mathrm{d}p}{\rho(p)} \tag{4.1.3a}$$

或

$$\mathrm{d}P = \frac{\mathrm{d}p}{\rho(p)} \tag{4.1.3b}$$

将此式两边的全微分展开,并比较两边各相同自变量的系数有

$$\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\,p = \mathrm{grad}P. \tag{4.1.3c}$$

将(4.1.2)与(4.1.3c)式代入方程(4.1.1b). 于是,在无粘性,正压流体与体力有势的条件下,(4.1.1b)式变为

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \mathrm{grad}\left[\frac{v^2}{2} + P + \pi\right] + \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} = 0. \tag{4.1.4}$$

4.2 伯努利积分及其应用

上节的方程(4.1.4)无论是对无旋或有旋,定常或非定常流动均可适用. 如果流动是定常的,(4.1.4)式变为

$$\mathrm{grad}\left[\frac{v^2}{2} + P + \pi\right] + \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} = 0.$$

用流线微元 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 点乘上式各项后有

$$\mathrm{grad}\left[\frac{v^2}{2} + P + \pi\right]\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} + \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0. \tag{4.2.1}$$

由于 $\mathrm{rot}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}$ 的方向与$\boldsymbol{v}$ 的方向互相垂直,而 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 的方向又与$\boldsymbol{v}$ 的方向互相平行,故有

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0$$

和

$$\mathrm{grad}\left[\frac{v^2}{2} + P + \pi\right]\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mathrm{d}\left[\frac{v^2}{2} + P + \pi\right],$$

即(4.2.1)式变为

$$\mathrm{d}\left[\frac{v^2}{2} + P + \pi\right] = 0. \tag{4.2.2}$$

沿流线积分此式,并将(4.1.3a)式代入,和考虑到在重力场内 $\pi = gy +$ 常数,其中 g 为重力加速度,则(4.2.2)式变为

$$\frac{v^2}{2} + \int \frac{\mathrm{d}p}{\rho(p)} + gy = c(\psi), \tag{4.2.3}$$

其中 $c(\psi)$ 为一随流线不同而不同的常数. 这是一般形式的伯努利积分,它适用于可压缩或不可压缩流体的有旋或无旋流动,但运动必须是定常的,而且仅沿流线成立.

当密度 ρ 是给定的压强的函数时,从(4.2.3)式可得可压缩流体的伯努利积分,它将在第十章中讨论.

如果密度 ρ 为一常数,(4.2.3)式变为

$$\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\rho}+gy=c_1(\psi). \tag{4.2.4}$$

这是对不可压缩流体的伯努利积分(或定理),它是在欧拉方程出现(1755 年)之前,1738 年 D. 伯努利首先通过对容器的孔口流出和变截面管道流动进行仔细观察和广泛测量后提出的. 1757 年欧拉将其推广至可压缩流体情况.

方程(4.2.4)中各项的量纲均为[长度/时间]^2,它们可以作如下的力学解释:即左边第一项为单位质量流体所具有的动能,第二项中的 $\frac{1}{\rho}$ 可视为单位质量流体所具有的体积,而 $\frac{1}{\rho}p$ 则代表单位质量流体以压强 p 向周围流体所作的功,第三项为每单位质量流体的重力势能. 于是,伯努利积分表明:沿一流线各点的机械能总和为一常数.

在工程应用中,力的单位常用重量,即用重力加速度 g 除(4.2.4)式后有

$$\frac{v^2}{2g}+\frac{p}{\rho g}+y=c_1'(\psi). \tag{4.2.5}$$

这样,各项的量纲均为长度. 左边第一项代表单位重量流体的动能,或称速度头;第二项为单位重量流体所作的功,或称压强头,第三项为单位重量流体所具有的势能,或称高度头. 这样,(4.2.5)式表明:沿一流线各点的总头为一常数.

应用伯努利积分时,必须注意下列各点:

1. 伯努利积分仅对无粘性正压流体,在体力有势和定常运动情况下沿一流线的各点成立,但若各流线的起始处(如无穷远处或容器的液面处)具有相同的 v, p 和 y,则各流线的常数 $c_1(\psi)$ 相同,随之,伯努利积分在任何时间对全流场的任何点均成立.

2. 伯努利积分虽然仅沿一流线成立,但在工程实践中也往往近似地用于拟一维定常管道或渠道流动,这时有两种近似方法,一种是取各截面上 v, p 等的平均值,另一种是对各项引进修正因子以补偿各流动参数在截面上分布的不均匀性.

3. 伯努利积分是从无粘性流体的运动方程导出的,因而不含机械能耗损项,但从能量的角度看,(4.2.4)式又是一个机械能守恒方程,在研究实际的管道与渠道流动中,有时又加上一个机械能耗损项,以考虑粘性的影响,这将在第八

章中加以详细讨论.

4. 对于随时间变化非常缓慢的流动,有时可近似地认为每一时刻的流动是定常的,随之采用定常流动的方法处理,称为准定常理论,伯努利积分亦可近似地应用于这类情况.

5. 伯努利积分不宜应用于有较大逆压梯度和强烈混合的流动(如突然扩大和水跃等). 因这时存在相当大的机械能耗损,而这在推导方程时是未加以考虑的.

6. 伯努利积分还不宜用于局部压强等于或小于液体饱和蒸汽压强的区域,因为在那里将发生空化现象(参见本章末"实验中的发现"(七)),这是推导方程时未曾考虑的.

7. 伯努利积分也不宜应用于通过一装置(如泵、涡轮机等)的流动,因此时流体中往往有机械能的输入或输出. 这在推导方程时也是未加以考虑的. 但在装置的上、下游,如果条件容许可以分别应用伯努利积分.

现在列举几个应用伯努利积分的例子.

例 4.1 流体的运动速度是流体力学中一个最基本的流动参数,目前已有许多方法测量它,结构最简单使用最普遍的就是皮托－静压管. 它由内外两层套管组成,头部有一小孔与内管相通,侧壁有几个小孔与套管的环形空间相通,两通道的另一端分别与一 U 形压强计的两端相连,如图 4.1 所示. 压强计中盛有密度为 ρ_m 的液体(通常为水银,酒精或水). 使用时,头部正对来流,管体轴线与来流平行,读出压强计的压差 Δh,即可算出来流速度.

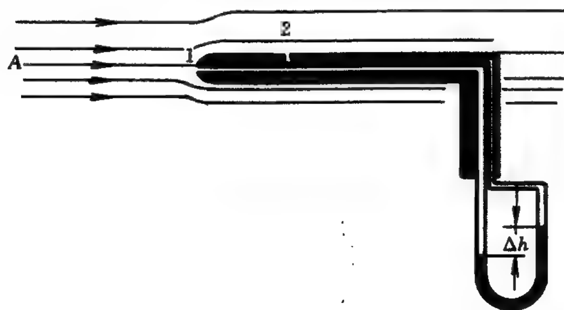


图 4.1 皮托－静压管

为了说明皮托－静压管的工作原理,考虑沿管壁的流线 A,在点 1 处,速度为零,压强最大,称为总压. 此点通常称为驻点,至点 2 处,速度增加,压强减小,称为静压. 在 1 与 2 点处,应用伯努利积分有

$$\frac{v_1^2}{2}+\frac{p_1}{\rho}+gy_1=\frac{v_2^2}{2}+\frac{p_2}{\rho}+gy_2, \tag{4.2.6}$$

其中 v_1, v_2 与 p_1, p_2 分别代表点 1,2 处的速度与压强. 由于 $v_1=0$ 和 $y_1 \doteq y_2$, (4.2.6)式变为

$$v_2=\sqrt{\frac{2(p_1-p_2)}{\rho}}. \tag{4.2.7}$$

根据流体静力学知,在 U 形压强计中有

$$p_1-p_2=\rho_m g\Delta h,$$

其中 ρ_m 为 U 形管中液体的密度,Δh 为液面高度差,将此式代入(4.2.7)式后有

$$v_2=\sqrt{\frac{2\rho_m}{\rho}g\Delta h}. \tag{4.2.8}$$

读出 Δh 后,利用此式即可算出速度 v_2. 但应注意这一结果是在流体无粘性的假定上获得的,为了考虑流体的粘性和管体对流场扰动的影响等,实际上,应对上述所得值加以修正. 常用的方法是将给定的皮托－静压管与一已校准的皮托－静压管相比较,获得一修正系数 c,于是,(4.2.8)式最后变为

$$v_2=c\sqrt{\frac{2\rho_m}{\rho}g\Delta h}. \tag{4.2.9}$$

在实际应用中,流体的流量是一个很重要的参数. 测量流量的方法很多,如利用文丘里管,孔板、转子和各种堰等均是. 对于具有自由面的明渠流动,通常采用堰的方法来测量流量,所谓堰就是在明渠中设置的一个障碍物,它能使上游的流体积蓄起来,并绕过它流向下游,通过测量上游的液面高即可算出明渠的流量. 几种常见的堰剖面形状如图 4.2 所示,(a)薄壁堰,(b)厚壁堰和(c)曲壁堰,现以薄壁堰为例.

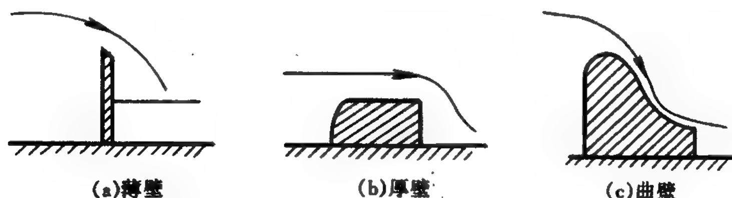


图 4.2　几种常见的堰

例 4.2　一堰口为尖缘的矩形薄壁堰,明渠宽与堰口宽分别为 L_c 与 L. 上游水面较堰口水平边缘高出 H,如图 4.3 所示. 假定(1)忽略流体的粘性与表面张力,(2)在堰口的水平边缘上方流动仍保持水平,(3)溢流舌压强为大气压强 p_a,即表压 p_g 为零,和(4)在上游足够远处,整个截面上的速度为均匀的,即等于一常数,同时压强遵循静压规律. 试求此明渠的体积流量 Q_V.

沿流线 A 取 1、2 两点,使点 1 位于上游足够远处,而点 2 位于堰口正上方,

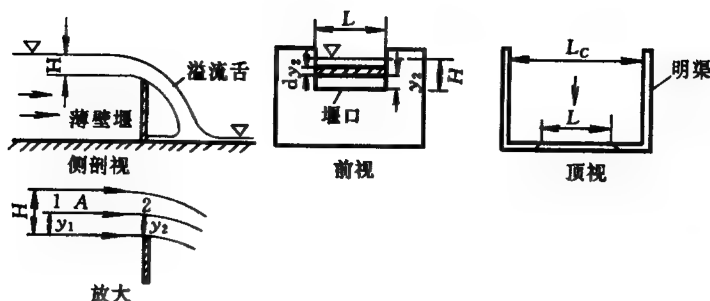


图 4.3 绕薄壁堰流动

如放大图中所示，在 1、2 点处应用伯努利积分有

$$\frac{v_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\rho g}+y_1=\frac{v_2^2}{2g}+\frac{p_2}{\rho g}+y_2. \tag{4.2.10}$$

先求速度 v_2，根据假定(3)与(4)分别有

$$p_2=0$$

和

$$\frac{p_1}{\rho g}+y_1=H,$$

代入(4.2.10)式后有

$$v_2=\sqrt{2g\left[H-y_2+\frac{v_1^2}{2g}\right]}. \tag{4.2.11}$$

可见 v_2 随 y_2 而变. 明渠的体积流量 Q_V 为

$$Q_V = L\int_0^H v_2 \mathrm{d}y_2.$$

将(4.2.11)式代入，积分后有

$$Q_V=\frac{2}{3}L\sqrt{2g}\left[\left(H+\frac{v_1^2}{2g}\right)^{3/2}-\left(\frac{v_1^2}{2g}\right)^{3/2}\right]$$

作为一种近似，令 $v_1=0$，上式简化为

$$Q_V=\frac{2}{3}\sqrt{2g}LH^{3/2}. \tag{4.2.12}$$

可见测出 H 后，即可由此算出体积流量. 实践表明 H 的指数$\frac{3}{2}$是正确的，但系数$\frac{2}{3}$则偏大，这是由于解题时用了各种假定和当 $L_c>L$ 时溢流舌将出现收缩的缘故. 通常实际流量值约为此理论流量值的 62%左右.

例 4.3 另一种常用的流量计为转子流量计. 它由一锥形透明圆管和一节流转子构成. 圆管的半锥角 θ 约为 4°左右，其小直径一端位于下方. 因之，下端

的横截面积较上端的略小，节流转子可具有不同的形状和由不同的材料做成，但其密度必须大于所测流体的密度．当无流体从圆管下方往上流时，转子停留在锥形管的底部，其最大直径通常选择为几乎完全堵塞锥形管的下端．当流体由下往上流时，随着流速的增大，转子逐渐上升，直至管壁与转子之间的环形空隙足够大使转子能达到动平衡状态为止．这时除了忽略转子所受的阻力以外，作用在转子上的力包括(1)转子的重量 $\rho_b V_b g$，(2)转子所受的浮力 $\rho_f V_b g$，和(3)由于转子上、下表面压差而产生的力 $(p_1-p_2)A_m$，其中 ρ_b，ρ_f 分别为转子与流体的密度，V_b 为转子的体积，g 为重力加速度，p_1，p_2 为作用于转子下、上表面的压强，A_m 为转子的最大横截面积，则动平衡时有

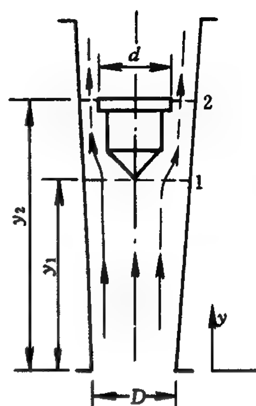


图 4.4　转子流量计

$$(p_1-p_2)A_m+\rho_f V_b g=\rho_b V_b g. \tag{4.2.13}$$

如果近似地认为流动是一维的(即各流动参数在沿流动方向的各横截面上是均匀的)，过转子上、下端取横截面 2 与 1．在此二处应用伯努利积分，并近似认为 $y_1 \doteq y_2$，于是有

$$p_1-p_2=\frac{\rho_f}{2}(v_2^2-v_1^2).$$

利用连续性方程后上式变为

$$p_1-p_2=\frac{1}{2}\rho_f v_2^2\left[1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right] \tag{4.2.14}$$

其中 A_1，A_2 分别为横截面 1，2 处的面积，应注意 A_1 即锥形管的截面积，而 A_2 为锥形管与转子之间的环形面积．将(4.2.14)式代入(4.2.13)式并对 v_2 求解有

$$v_2=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}}\sqrt{\frac{2(\rho_b-\rho_f)V_b g}{\rho_f A_m}},$$

体积流量

$$Q_V=\frac{A_2}{\sqrt{1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}}\sqrt{\frac{2(\rho_b-\rho_f)V_b g}{\rho_f A_m}}. \tag{4.2.15}$$

为了说明体积流量 Q_V 与浮子的上升高度 y 成正比，还需要对 A_2 再作一些近似．由于

$$A_2=\frac{\pi}{4}[(D+\theta y)^2-d^2],$$

其中 D 与 d 分别为锥形管下端入口与转子最大横截面积直径，θ 为半锥角，y 为转子上表面离进口处的距离，因 θ 很小，$\tan\frac{\theta}{2}\doteq\frac{\theta}{2}$ 和 $D\doteq d$，于是有

$$A_2\doteq\frac{\pi}{4}D\theta y.$$

将此式代入(4.2.15)式后有

$$Q_V=cy\sqrt{\frac{\rho_b-\rho_f}{\rho_f}}, \tag{4.2.16a}$$

其中

$$c=\frac{\pi}{4}\frac{D\theta}{\sqrt{1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}}\sqrt{\frac{2V_bg}{A_m}}=\text{常数}. \tag{4.2.16b}$$

通常为了考虑流体粘性与压强分布的影响，引入一由实验确定的修正系数 c_d，这样，(4.2.16a)式变为

$$Q_V=c_dcy\sqrt{\frac{\rho_b-\rho_f}{\rho_f}}.$$

很容易证明如果设计转子流量计时选取 $\rho_b=2\rho_f$，则可补偿由于温度变化引起的密度变化，此时

$$Q_V=c_dc\frac{\rho_b}{2},$$

这也是转子流量计的一个优点.

例 4.4 一大容器其横截面积 $A_1(h)$ 随高度 h 而变，容器的下方有一不太长的小侧管，其横截面积为 A_2，已知 $A_2\ll A_1$，侧管的外端有一阀门，在初始时刻阀门关闭，容器内的液面高度为 h_0. 如果忽略流体的粘性影响和阀门损失等，试求打开阀门后排尽液体所需的时间.

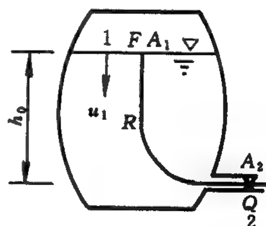


图 4.5 孔口出流

由于 $A_1\gg A_2$，容器内液面的下降速度非常缓慢，可用准定常理论处理此问题. 取流线 FRQ，从自由面的点 1 处开始，几乎垂直向下地经大容器，逐渐收缩进入侧管，终止于出口的点 2 处. 将伯努利积分应用于点 1 与 2. 考虑到液面上方与侧管出口处，压强均为大气压强，于是有

$$\frac{1}{2}v_1^2+gh=\frac{1}{2}v_2^2. \tag{4.2.17}$$

根据连续性方程

$$v_2 = \frac{v_1 A_1(h)}{A_2}, \tag{4.2.18}$$

将(4.2.18)式代入(4.2.17)式并对 v_1 求解有

$$v_1 = \left[\frac{2gh}{\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1}\right]^{1/2}. \tag{4.2.19}$$

应注意 $v_1 = -\frac{dh}{dt}$,于是有

$$\frac{dh}{dt} = -\left[\frac{2gh}{\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1}\right]^{1/2}.$$

如果给定 $A_1(h)$,则可解此微分方程求出函数 $h(t)$. 这里仅考虑一特殊情况,即 $A_1 =$ 常数,这时有

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\sqrt{\frac{2g}{\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1}}\, dt,$$

积分并利用初始条件 $t=0, h=h_0$ 确定积分常数,最后有

$$\sqrt{h} = \sqrt{h_0} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2g}{\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1}}\, t. \tag{4.2.20}$$

由于 $A_1 \gg A_2 \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1 \doteq \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2$,于是(4.2.20)式简化为

$$h = \left[\sqrt{h_0} - \sqrt{\frac{1}{2} g \frac{A_2}{A_1}}\, t\right]^2. \tag{4.2.21}$$

将容器内液体排尽所需的时间为

$$\sqrt{\frac{1}{2} g}\frac{A_2}{A_1} t \doteq h_0^{1/2}$$

或

$$t = \frac{A_1}{A_2}\sqrt{\frac{2h_0}{g}}. \tag{4.2.22}$$

可见 A_1/A_2 与 h_0 愈大,所需的时间愈长.

出口速度为

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 = \left[\frac{2gh}{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}\right]^{1/2}. \tag{4.2.23}$$

当 $A_1 \gg A_2$ 时,$\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1 \doteq \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2$,于是

$$v_2 = \sqrt{2gh}.$$

这与孔口出流的结果相符.

由于1与2两点的压强均为大气压,似乎压强在这问题中不太起作用,其实并非如此. 只要看看同一流线上 R 点的压强就清楚了. 在 F 和 R 点应用伯努利积分有

$$\frac{1}{2}v_1^2 + gh_R + p_R/\rho = \frac{1}{2}v_1^2 + gh + p_a/\rho$$

或

$$p_R = p_a + \rho g(h - h_R).$$

即 R 点的压强正好为静压强. 换言之,流动的上部分为流体的重量所控制,从 R 点至侧管进口处,压强下降至大气压强,而速度则从 v_1 加速至 v_2.

4.3 拉格朗日积分及其应用

当流动为无旋时,方程(4.1.4)也可进行直接积分,这时,$\text{rot}\boldsymbol{v} = 0$,并存在速度势 φ 和 $\boldsymbol{v} = \text{grad}\varphi$. 由于时间与空间为彼此独立的自变量,故

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\text{grad}\varphi = \text{grad}\,\frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

将此式,(4.1.1)与(4.1.3)式和 $\text{rot}\boldsymbol{v} = 0$ 代入方程(4.1.4)后有

$$\text{grad}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + P + \pi\right] = 0.$$

这表明括号中的函数不依赖于空间坐标(x,y,z),仅依赖于时间 t,即

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + P + \pi = F(t), \tag{4.3.1}$$

其中 $F(t)$为一随时间变化的常数,$\frac{\partial \varphi}{\partial t}$为加速度项. 此式称为拉格朗日积分或柯西积分. 在同一时刻,$F(t)$对全流场为同一常数,即(4.3.1)式适用于全流场的任何点.

与(4.2.4)和(4.2.5)式相对应,(4.3.1)式变为

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gy = F_1(t) \tag{4.3.2}$$

和

$$\frac{1}{g}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + y = F'_1(t). \tag{4.3.3}$$

很显然，如果流动既是无旋的又是定常的，则(4.3.2)式简化为

$$\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\rho}+gy=F. \tag{4.3.4}$$

它表明：对任何时刻和对流场中的任何点，左边各项之和为同一常数 F.

与伯努利积分相比较，拉格朗日积分对非定常无旋流动的全流场成立，但对不同时刻有不同的积分常数，而伯努利积分对定常有旋或无旋流动沿流线成立，但对不同的流线有不同的积分常数. 此外，还应注意它们的许多特殊情况. 现在举几个例子说明拉格朗日积分的应用.

例 4.5　U 形管是流体实验中广泛用来测量压强差的一种仪器. 它由一根 U 形玻璃管和管内贮存的液体(如水银、酒精和水等)所构成，如图 4.6 所示. 当液柱平衡时两液面处于同样水平高度，如果某一液面受到扰动，就会出现液柱振荡现象，这在实验中是经常遇到的. 假定流体为不可压缩的，忽略粘性摩擦力和表面张力，液面上方为大气压强 p_a，液柱总长度为 L，试求一液面受扰动后，液柱所遵循的运动规律.

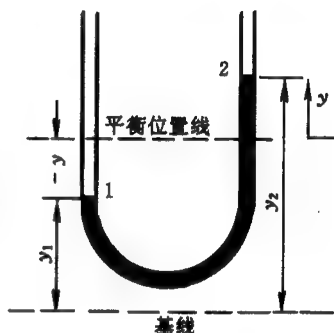


图 4.6　U 形压强计

将液柱运动近似地看成为一维的和无旋的. 取任意水平线作为基线. 当左边的液面 1 受到扰动后，它将相对于平衡位置线向下移动 $-y$，而右边的液面 2 则向上移动 y，随之，出现振荡现象. 在同一时刻将拉格朗日积分应用于液面 1 与 2 有

$$\frac{v_1^2}{2}+\frac{p_a}{\rho}+gy_1=\frac{v_2^2}{2}+\frac{p_a}{\rho}+gy_2+\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \tag{4.3.5}$$

由连续性方程知沿液柱任一横截面的速度相等，即 $v_1=v_2$，同时速度 v 仅为时间的函数. 而

$$\varphi=\varphi_0+\int v\mathrm{d}s$$

其中 $\mathrm{d}s$ 为沿液柱的微线元，对 t 偏微分，

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\int v\mathrm{d}s=\int_1^2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}s=L\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t},$$

代入(4.3.5)式后有

$$-L\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=g(y_2-y_1)=2gy$$

或

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{2g}{L}y,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}+\frac{2g}{L}y=0. \tag{4.3.6}$$

这就是描绘液柱运动的微分方程，它的一般解为

$$y=c_1\cos\sqrt{\frac{2g}{L}}t+c_2\sin\sqrt{\frac{2g}{L}}t,$$

其中 c_1 与 c_2 为任意积分常数. 如果 $t=0$ $y=Y$ 和$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0$，则 $c_1=Y$ 和 $c_2=0$，于是此问题的解为

$$y=Y\cos\sqrt{\frac{2g}{L}}t.$$

它表明液柱的运动为简谐振荡，其周期为 $2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}}$，速度为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\sqrt{\frac{2g}{L}}Y\sin\sqrt{\frac{2g}{L}}t.$$

例 4.6 在例 4.4 中曾用伯努利积分准定常地分析了从大容器侧管排水的速度和时间，这里再用拉格朗日积分来分析这一问题.

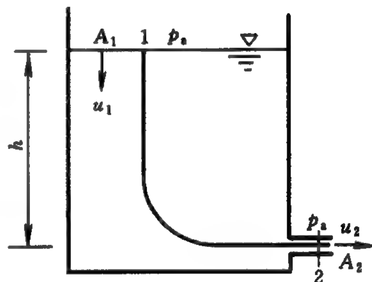


图 4.7 大容器排水

如图 4.7 所示，在液面 1 处与侧管出口 2 处应用拉格朗日积分有

$$\frac{v_1^2}{2}+\frac{p_a}{\rho}+gh=\frac{v_2^2}{2}+\frac{p_a}{\rho}+0+\frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

根据连续性方程 $v_2=\frac{A_1}{A_2}v_1$，代入上式后有

$$\frac{1}{2}v_1^2\left[\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2-1\right]-gh+\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0. \tag{4.3.7}$$

对于非定常项$\frac{\partial\varphi}{\partial t}$，如果仅考虑流线的垂直部分，且假定其为直线，则与例 4.5 相似，

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\int_h^0\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}s=-h\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t}.$$

将此式代入(4.3.7)式后有

$$\frac{1}{2}v_1^2\left[\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2-1\right]-gh-h\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t}=0. \tag{4.3.8}$$

这是一个对 v_1 的非线性方程，如果希望获得准确的结果需要求它的解，这里，为了简单，用准定常的结果来近似地考虑非定常项. 从(4.2.19)式

$$v_1=\left[\frac{2gh}{\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2-1}\right]^{1/2}, \tag{4.2.19}$$

对时间 t 微分后有

$$h\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t}=\frac{gh}{\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2-1}.$$

将此结果代入(4.3.8)式并对 v_1 求解有

$$v_1=\left[\frac{2gh}{\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2-1}\right]^{1/2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}}, \tag{4.3.9}$$

随之

$$v_2=\left[\frac{2gh}{1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}\right]^{1/2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}}. \tag{4.3.10}$$

将(4.3.9)和(4.3.10)式分别与(4.2.19)和(4.2.23)式相比,可见非定常效应近似地将速度 v_1 与 v_2 增加 $\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}}$ 倍,而排尽流体所需的时间则会缩短 $\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}}$ 倍,当 $\frac{A_2}{A_1}$ 足够大时,这种效应相当显著.

例 4.7　大容器的底部与一长度为 L 直径为 D 的圆管相连,圆管的出口处装有一阀门,开始时阀门紧闭,容器内的液面高度为 h,如图 4.8 所示. 在阀门突然开启以后的短暂时间内,流动是非定常的,圆管的体积流量随时间而变化,假定(1)管内为一维流动,即各截面的速度相等,(2)不考虑粘性摩擦力和阀门损失,(3)除圆管进口附近外,忽略容器中液体的下降速度,和(4)液面上方和圆管出口处均为大气压强 p_a,试求流量随时间的变化规律.

取圆管中心线作为基线,以液面及圆管出口截面作为 1 与 2 截面,将拉格朗日积分应用于此二截面上的两点有

$$\frac{1}{2}v_1^2+\frac{p_a}{\rho}+gh=\frac{1}{2}v_2^2+\frac{p_a}{\rho}+0+\frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

因 $v_1=0$,上式变为

$$gh=\frac{1}{2}v_2^2+\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \tag{4.3.11}$$

如果容器足够大,以致此不定常过程主要是在圆管内进行,并用 s 代表从圆管入

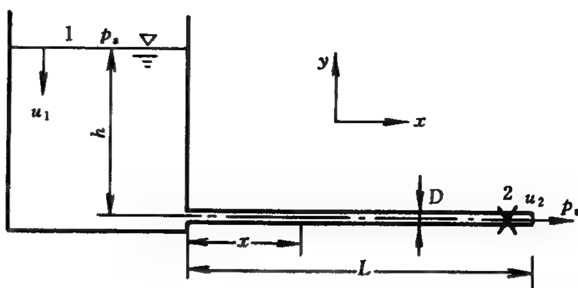


图 4.8 长管排水

口至管内任一截面的距离，考虑到对给定时刻管内任何一点的速度均为 v_2，于是

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\int_0^L\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}s=L\,\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t}.$$

将此式代入(4.3.11)式有

$$\frac{\mathrm{d}t}{2L}=\frac{\mathrm{d}v_2}{2gh-v_2^2}.$$

在 $t=0,v_2=0$ 与 $t=t,v_2=v_2$ 之间进行积分，并注意到 $\operatorname{artanh}0=0$，有

$$t=\frac{2L}{\sqrt{2gh}}\operatorname{artanh}\frac{v_2}{\sqrt{2gh}} \tag{4.3.12}$$

或

$$v_2=\sqrt{2gh}\,\mathrm{th}\left[\frac{t}{2L}\sqrt{2gh}\right]. \tag{4.3.13}$$

当 $t\to\infty$ tg $h(\infty)\to L$，从(4.3.13)式有 $v_2=\sqrt{2gh}=v_{2\infty}$. 如果取 $v_2=0.95v_{2\infty}$ 作为近似达到稳定流动的时间，并取 $L=500\text{m}$ 和 $h=50\text{m}$，则

$$t=\frac{1\,000}{\sqrt{980}}\times1.84=58.8\text{s}.$$

可见建立管内稳定流动的时间是相当短的，最后，体积流量

$$Q_V=v_2A_2=\frac{1}{4}\pi D^2\sqrt{2gh}\,\mathrm{th}\left[\frac{t}{2L}\sqrt{2gh}\right].$$

在液体中常常看到有气泡上升，它的出现不外有三种原因：一是液体中含有某些与其无关的气体，如水中含有空气等；二是在高速流动的液体中某点的局部压强较该液体的蒸汽压强小很多，于是在该点形成一个充满该液体蒸气的空腔，这就是著名的空化现象，三是局部加热液体使蒸气压强超过液体的局部压强，通过沸腾过程形成蒸气空腔. 下面简单地分析一下液体中球形气泡的受力问题.

例 4.8 一球形气泡在静止无界的液体中膨胀，液体作球对称的运动，如果气泡半径随时间的变化规律为 $R(t)$，忽略气泡的内部流动和重力的影响，并假定气泡内部的压强 p_i 是均匀的，试求气泡表面压强 p 随时间的变化规律.

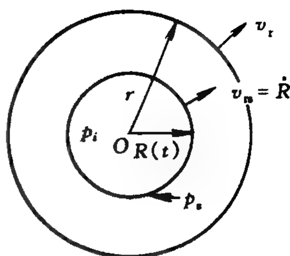


图 4.9 气泡膨胀

在气泡外液体作球对称运动，即流场中各点的速度矢量 $\boldsymbol{v}=v_r\boldsymbol{r}$，其中 v_r 与 $\boldsymbol{r}$ 分别为 $\boldsymbol{v}$ 在 r 方向的分量与 r 方向的单位矢量，由于 $\nabla\times v_r\boldsymbol{r}=\mathrm{rot}\,v_r\boldsymbol{r}=0$，液体的运动是无旋的，故存在一速度势 $\varphi(r,t)$，现在来求此 φ.

考虑流场中任意一球面，其半径为 r，速度为 v_r，类似地，对气泡表面有半径为 R，速度为 $v_{rs}=\dot{R}$，其中 $\dot{R}$ 代表 R 的时间导数，如图 4.9 所示. 在此二球面处应用连续性方程有

$$4\pi r^2 v_r=4\pi R^2\dot{R},$$

即

$$v_r=\frac{R^2\dot{R}}{r^2}.$$

注意到

$$v_r=\frac{\partial\varphi}{\partial r}$$

或

$$\partial\varphi=\frac{R^2\dot{R}}{r^2}\,\partial r,$$

积分后有

$$\varphi=-\frac{R^2\dot{R}}{r}\ . \tag{4.3.14}$$

其次考虑无穷远处一球面，令 $r\to\infty$ 时 $p\to p_\infty$，同时在气泡表面 $r=R$，$p=p_s$，在此二球面上的任意点应用拉格朗日积分有

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{r=R}+\frac{1}{2}\left[\frac{R^2\dot{R}}{R^2}\right]^2+\frac{p_s}{\rho}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{r\to 0}+\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{p_\infty}{\rho}. \tag{4.3.15}$$

对(4.3.14)式微分后可得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-\frac{R^2\ddot{R}+2R\dot{R}^2}{r}\ .$$

随之

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{r=R}=-(R\ddot{R}+2\dot{R}^2) \tag{4.3.16}$$

和

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{r\to\infty}\to 0. \tag{4.3.17}$$

将(4.3.16)与(4.3.17)式代入(4.3.15)式并整理后可得气泡表面压强随时间的变化规律,

$$\frac{p_s}{\rho}=\frac{p_\infty}{\rho}+R\ddot{R}+\frac{3}{2}\dot{R}^2.$$

上面的伯努利与拉格朗日积分是在进一步简化兰姆－葛罗米柯方程的基础上获得的. 另一面,如果将积分形式的流体力学方程组直接应用于有限控制体积,特别是当流动可以近似地看成为一维流动时,也可获得简单的关系式,利用它们可以给出非常有用的结果,这对工程设计人员和力学工作者特别重要,下面将分别予以介绍.

4.4 连续性方程及其应用

从第三章(3.7.2a)式,对有限控制体积成立的积分形式的连续性方程为

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho \mathrm{d}\tau+\int_{CS}\rho \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}=0, \tag{3.7.2a}$$

其中 ρ 为密度,$\mathrm{d}\tau$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ 分别为体积元与矢量面积元,CV 与 CS 分别代表控制体积和它的表面,$\boldsymbol{v}$ 为相对于控制体积的流体速度矢量,即当控制体积固定于空间时为惯性系速度,当控制体积以匀速运动时为相对于运动坐标的速度. $\rho\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ 为一标量,它的符号由 $\boldsymbol{v}$ 相对 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ 的方向确定,通常取质量流出控制体积表面为正,流入为负,与控制体表面相切时为零.

如果流体运动时仅有 N 个控制体表面区被流体穿过,现用 A_N 去代表这些表面区,则(3.7.2a)式左边第二项对整个控制体表面的积分简化为仅对 N 个控制体表面区的积分,即

$$\int_{CS}\rho \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}=\sum_{N=1}^{N}\int_{A_N}\rho_N \boldsymbol{v}_N\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}_N, \tag{4.4.1}$$

其中脚标 N 代表在第 N 表面区的值. 这里存在两类可以直接积分(4.4.1)式右边的情况,一类是表面区的流体密度与速度分布和表面区的形状大小都是已知的,另一类是表面区的流体密度与速度可以近似地看成为均匀分布的(或取它们的平均值)和表面区的形状大小是给定的,现在分别用脚标 N1 与 N2 代表这两种情况,于是(4.4.1)式的右边可改写为

$$\begin{aligned}\sum_{N=1}^{N}\int_{A_N}\rho_N \boldsymbol{v}_N\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}_N=&\sum_{N1=1}^{M}\int_{A_{N1}}\rho_{N1} \boldsymbol{v}_{N1}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}_{N1}\\&+\sum_{N2=1}^{N-M}\int_{A_{N2}}\rho_{N2} \boldsymbol{v}_{N2}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}_{N2}.\end{aligned} \tag{4.4.2}$$

上式右边第一项的积分值依赖于给定的速度分布和表面区的形状大小等，而第二项则可以作进一步简化，其中 M 为第一类积分的个数.

由于流体的密度与速度是均匀分布的和表面区的形状大小是已知的，第二项可改写为

$$\sum_{N2=1}^{N-M}\int_{A_{N2}}\rho_{N2}\,\boldsymbol{v}_{N2}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}_{N2}=\sum_{N2=1}^{N-M}\rho_{N2}\,\boldsymbol{v}_{N2}\cdot\boldsymbol{A}_{N2}.\tag{4.4.3a}$$

或用标量表示

$$\rho_{N2}\,\boldsymbol{v}_{N2}\cdot\boldsymbol{A}_{N2}=\pm|\rho_{N2}v_{N2n}A_{N2n}|=\pm Q_{mN2},\tag{4.4.3b}$$

其中 v_{N2n} 与 A_{N2n} 为 $\boldsymbol{v}_{N2}$ 与 $\boldsymbol{A}_{N2}$ 的相互垂直分量，Q_{mN2} 为质量流量，式中的符号仍按上述法则选取，将(4.4.1)，(4.4.2)，(4.4.3a)或(4.4.3b)式代入(3.7.2a)式后有

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho\mathrm{d}\tau+\sum_{N1=1}^{M}\int_{A_{N1}}\rho_{N1}\,\boldsymbol{v}_{N1}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}_{N1}+\sum_{N2=1}^{N-M}\rho_{N2}\,\boldsymbol{v}_{N2}\cdot\boldsymbol{A}_{N2}=0.\tag{4.4.4}$$

对均质不可压缩流体，$\rho=$常数，

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho\mathrm{d}\tau=0.$$

(4.4.4)式变为

$$\sum_{N1=1}^{M}\int_{A_{N1}}\rho_{N1}\,\boldsymbol{v}_{N1}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}_{N1}\pm\sum_{N2=1}^{N-M}Q_{mN2}=0.\tag{4.4.5}$$

此式既适用于定常也适用于非定常流动.

例 4.9 一不可压缩粘性流体在一圆管的进口段内流动，在进口处速度 v_2 为均匀的，至进口段末端速度已发展为完全抛物面分布即

$$v_1=v_m\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

其中 R 为圆管半径，v_m 为圆管轴线上的速度，v 为距轴线 r 处的速度，流体的密度为 ρ，试求 v_m.

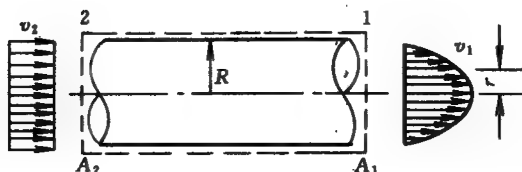


图 4.10 圆管进口段流动

取控制体使包围整个进口段，如图所示，除进口截面 2 与出口截面 1 有流体通过外，其余管壁(或控制体表面)均无流体通过，应用(4.4.5)式有

$$\int_{A_{21}} \rho \boldsymbol{v}_{21} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}_{21} - Q_{m22} = 0$$

或
$$\rho \int_0^R v_m \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \cdot 2\pi r \mathrm{d}r - \rho\pi R^2 v_2 = 0$$

或
$$\rho \frac{\pi R}{2} v_m - \rho\pi R^2 v_2 = 0,$$

$$v_m = 2v_2,$$

即轴线上的速度为进口速度的两倍.

例 4.10 一高度为 H 具有两个进水通道的密封容器,它的横截面积为 A_t,两进口道 1 与 2 的横截面积与速度分别为 A_1, v_1 与 A_2, v_2,容器内水的深度为 h,液面上方为空气其密度为 ρ_a,求深度 h 随时间的变化率$\left(即 \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right)$.

取控制体积包围整个容器,除两个进水道外,其余控制表面均无流体通过,这是一个有可压缩气体(空气)的非定常流动问题,而且容器内包括两种不同的流体,应用(4.4.4)式并注意没有积分项.

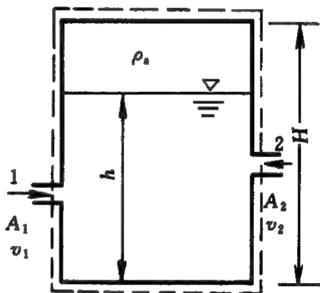


图 4.11 密封容器注水

$$\sum_{N1=1}^{M} \int_{A_{N1}} \rho_{N1} \boldsymbol{v}_{N1} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}_{N1} = 0,$$

于是有
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho \mathrm{d}\tau - Q_{m1} - Q_{m2} = 0.$$

对第一项有

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho \mathrm{d}\tau = \frac{\partial}{\partial t}(\rho_w A_t h) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho_a A_t (H - h)]$$

其中 ρ_w 为水的密度,注意$\frac{\partial}{\partial t}[\rho_a A_t (H-h)]$代表液面上方空气的质量变化率,由于质量守恒,此变化率为零,同时 ρ_w 与 A_t 均为常数,仅 h 为时间的函数,故最后有

$$\rho_w A_t \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} - (v_1 A_1 + v_2 A_2)\rho_w = 0$$

或
$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{v_1 A_1 + v_2 A_2}{A t_1}.$$

例 4.11 一球形容器内满盛高压空气,其体积、密度与温度分别为 V, ρ 和 T,容器有一排放管并装有阀门,假定出口截面 1 处的密度、速度和横截面积分别为 ρ_1, u_1 和 A_1. 同时,在任何时刻均认为容器内的气体性质是均匀的,并忽略粘性与阀门损失,试求当 $t=0$ 阀门开启以后,容器内密度的瞬时变化率.

取控制体积包围整个容器和排气管,如图所示,应用(4.4.4)式有

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho d\tau + \rho_1 v_1 A_1 = 0.$$

在上式左边第一项中控制体积不随时间变化,而密度 ρ 却随时间变化,由于假定在任何时刻容器内气体的性质是均匀的,故 ρ 仅是时间的函数,于是有

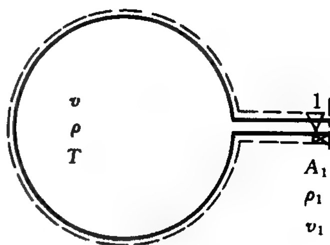


图 4.12　高压容器放气

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\rho_1 v_1 A_1}{V}.$$

这里的负号表示容器内的密度 ρ 随时间的增加而减小.

4.5　动量定理及其应用

从第三章(3.7.4a)式,对有限控制体积成立的积分形式的动量方程为

$$\Sigma \boldsymbol{F} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho \boldsymbol{v}\, d\tau + \int_{CS}\rho \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{A}, \tag{3.7.4a}$$

其中 $\Sigma\boldsymbol{F}$ 为作用于控制体积上的一切外力,包括体力和表面力,$\boldsymbol{v}$ 为相对于固定或匀速运动控制体积的速度矢量,动量 $\rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{A}$ 的符号仍以流出控制体积为正,流入为负. (3.7.4a)式的分量形式方程为

$$\Sigma F_x = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}u\rho d\tau + \int_{CS}u(\rho\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{A}), \tag{4.5.1a}$$

$$\Sigma F_y = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}v\rho d\tau + \int_{CS}v(\rho\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{A}), \tag{4.5.1b}$$

$$\Sigma F_z = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}w\rho d\tau + \int_{CS}w(\rho\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{A}), \tag{4.5.1c}$$

其中 u,v,w 为$\boldsymbol{v}$ 在 x,y,z 方向的速度分量,它们也是相对于固定或匀速运动的控制体积的.

与连续性方程的情况相类似,如果流体运动时仅在 N 个地方穿过控制体表面,并用 A_N 代表这些表面区,于是(4.5.1a)式右边第二项可改写为

$$\int_{CS}u(\rho\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{A}) = \sum_{N=1}^{N}\int_{A_N}u_N(\rho_N\,\boldsymbol{v}_N\cdot d\boldsymbol{A}_N). \tag{4.5.2}$$

上式右边也有两种情况可以进行直接积分,一是流体的 $v_N,\rho_N,\boldsymbol{v}_N$分布和控制体表面区 $\boldsymbol{A}_N$ 的形状大小都是已知的,二是假定在表面区 $v_N,\rho_N,\boldsymbol{v}_N$都是均匀分布的(或取平均值)且 $\boldsymbol{A}_N$ 的大小形状也是已知的,并仍用脚标 N1 与 N2 去区

别它们，于是

$$\sum_{N=1}^{N}\int_{A_N} u_N(\rho_N \boldsymbol{v}_N \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}_N) = \sum_{N1=1}^{M}\int_{A_{N1}} u_{N1}(\rho_{N1} \boldsymbol{v}_{N1}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}_{N1}) + \sum_{N2=1}^{N-M}\int_{A_{N2}} u_{N2}(\rho_{N2} \boldsymbol{v}_{N2}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}_{N2}). \quad (4.5.3)$$

一般说来，在应用中，上式右边第一项出现的机会不多，主要为第二项，而此项可作进一步简化即

$$\sum_{N2=1}^{N-M}\int_{A_{N2}} u_{N2}(\rho_{N2} \boldsymbol{v}_{N2}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}_{N2}) = \sum_{N2=1}^{N-M} u_{N2}\rho_{N2} \boldsymbol{v}_{N2}\cdot \boldsymbol{A}_{N2}. \quad (4.5.4a)$$

或用标量表示，

$$u_{N2}\rho_{N2} \boldsymbol{v}_{N2}\cdot \boldsymbol{A}_{N2} = \pm u_{N2} \mid \rho_{N2} v_{N2n} A_{N2n} \mid = \pm u_{N2} Q_{mN2}, \quad (4.5.4b)$$

其中 v_{N2n} 与 A_{N2n} 为 $\boldsymbol{v}_{N2}$ 与 $\boldsymbol{A}_{N2}$ 的相互垂直分量，Q_{mN2} 为质量流量，将(4.5.2)，(4.5.3)，(4.5.4b)或(4.5.4a)式代入(4.5.1a)式后有

$$\Sigma F_x = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} v\rho \mathrm{d}\tau + \sum_{N1=1}^{M}\int_{A_{N1}} v_{N1}(\rho_{N1} \boldsymbol{v}_{N1}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}_{N1}) \pm u_{N2} Q_{mN2}, \quad (4.5.5a)$$

完全类似地有

$$\Sigma F_y = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} v\rho \mathrm{d}\tau + \sum_{N1=1}^{M}\int_{A_{N1}} v_{N1}(\rho_{N1} \boldsymbol{v}_{N1}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}_{N1}) \pm v_{N2} Q_{mN2}, \quad (4.5.5b)$$

$$\Sigma F_z = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} w\rho \mathrm{d}\tau + \sum_{N1=1}^{M}\int_{A_{N2}} w_{N1}(\rho_{N1} \boldsymbol{v}_{N1}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}_{N1}) \pm w_{N2} Q_{mN2}. \quad (4.5.5c)$$

对于定常运动和不存在第一类积分项时，上式简化为

$$\Sigma F_x = \pm u_{N2} Q_{mN2}, \quad (4.5.6a)$$

$$\Sigma F_y = \pm v_{N2} Q_{mN2}, \quad (4.5.6b)$$

$$\Sigma F_z = \pm w_{N2} Q_{mN2}, \quad (4.5.6c)$$

利用物体(如火箭、飞机和船舰等)向后喷射流体以推动物体向前迈进，这是近代广泛使用的一种推进方法，但实际上，它在公元 1161 年我国南宋时就早已成功地用于作战了. 这一事实目前已得到举世公认. 喷射推进技术的一般原理是以各种方式向进入物体的流体加能或作功，然后以很高的速度向后喷出，使物体用一部分动量以换取推动物体前进的力. 所以，利用动量原理可以计算各种喷气发动机的推力.

喷气发动机的种类很多，这里对常见的几种作些简单介绍. 图 4.13(a)为冲压式发动机，它让周围空气进入发动机后，通过扩散段，以降低流体的速度和提高它的压强，然后进入燃烧室，通过燃烧加热后，由喷管高速喷出. 图 4.13(b)为涡轮喷气发动机，它与冲压式发动机不同的是在扩散段之后装有压气机以进一

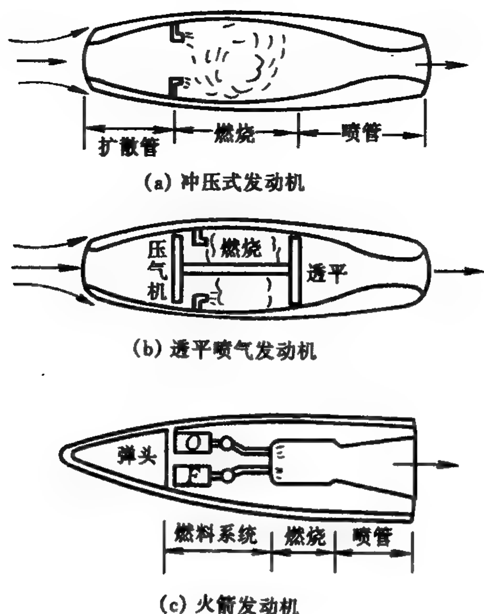


图 4.13　各种喷气发动机的示意图

步提高流体的压强，同时在喷管之前还装有涡轮机，一方面作为压气机的动力源，另一方面还可以减小耗油量，降低出口压强，以提高效率．图 4.13(c)为火箭发动机，它与前两种发动机不同的是它不用周围的空气作为助燃剂，而是自身带有完整的固体或液体燃料系统，因之，它的性能不依赖于周围环境条件．

这些发动机的内部流动情况虽然非常复杂，但计算它们的推力却不涉及这些内部详情．而仅与它们的周围环境与进出口条件有关，这正是应用动量定理的一大优点．

例 4.12　一喷气发动机在压强为 p_a 的大气中以常速 v 沿水平方向运动，进口与出口横截面处的面积、压强和密度分别为 A_1, p_a, ρ_1 与 A_e, p_e, ρ_e，一般 $p_e > p_a$．相对于喷气发动机的喷射速度为 v_j，假定在进出口截面上一切流动参数如 v, p, ρ 等都是均匀分布的，同时，忽略粘性阻力，试求冲压式发动机、涡轮喷气发动机和火箭发动机的推力．

取控制体包围整个发动机如图 4.14 所示．根据相对性原理，发动机在静止空气中以常速 v 运动，相当于空气以速度 v 流过静止的发动机．这样，可以在固定坐标系分析问题．应当注意作用在控制体积上的外力，除了推力 T 以外，还有作用于进出口横截面上的压力，应用(4.5.6a)式

$$\Sigma F_x = \pm u_{N2} Q_{mN2},$$

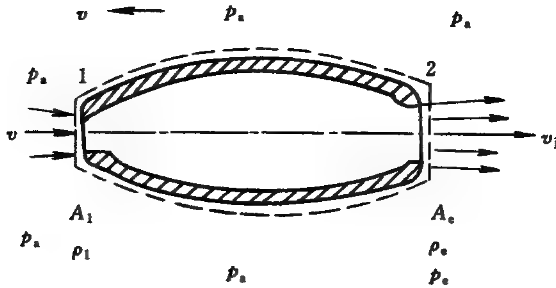


图 4.14 喷气发动机略图

有 $$T+(p_a-p_a)A_1-(p_e-p_a)A_e=Q_{m2}v_j-Q_{m1}v$$

或

$$T=Q_{m2}v_j-Q_{m1}v+(p_e-p_a)A_e, \tag{4.5.7}$$

其中 $Q_{m2}=\rho_e A_e v_j$ 与 $Q_{m1}=\rho_1 A_1 v$ 分别为进出口横截面的质量流量. 这就是定常情况下喷气推进系统的一般推力公式,它表明推力由二部分组成,即:(1)动量或速度推力,它由进入和排出气体的动量变化产生,这是推力的主要部分,它表明进口气体的速度愈低,质量流量愈小,则推力愈大,在同样进口条件下,如果用最少的燃料则需要尽可能地提高排气速度 v_j. (2)压力推力,它的大小依赖于进出口处的压强. 现在来分别讨论三种情况:

(a) 冲压式发动机　应当注意在流体的运动过程中 $Q_{m2}\neq Q_{m1}$,因为 Q_{m2} 除了包括 Q_{m1} 以外,还应包括燃料的质量流量 Q_{mf} 即 $Q_{m2}=Q_{m1}+Q_{mf}$ 或 $\rho_2=\rho_1+\rho_f$,于是(4.5.7)式变为

$$T_p=(Q_{m1}+Q_{mf})v_j-Q_{m1}v+(p_e-p_a)A_e.$$

(b) 涡轮喷气发动机　此时,相对于 Q_{m1} 来说 Q_{mf} 相当小和相对于动量推力来说,压强推力也相当小,故均可忽略不计,于是(4.5.7)式简化为

$$T_t=Q_{m1}(v_j-v).$$

(c) 火箭发动机　此时不需要吸入环境空气,即 $Q_{m1}=0$,而 $Q_{m2}=Q_{mo}+Q_{mf}$,其中 Q_{mo} 与 Q_{mf} 分别为氧化剂与燃料的质量流量,于是(4.5.7)式变为

$$T_r=(Q_{mo}+Q_{mf})v_j+(p_e-p_a)A_e.$$

例 4.13　一液体在弧形收缩圆管中作定常运动,进出口截面 1 与 2 的法线之间的夹角为 θ,如图 4.15 所示,进出口的横截面积,速度,压强分别为 A_1,v_1,p_1 与 A_2,v_2,p_2,液体的密度为 ρ,假定为一维流动,忽略壁剪应力 τ_w,法向壁应力 p_w 相互平衡,体力为管内液体的重量 W,若 p_1 与 p_2 已知,求液体作用于管壁上的力.

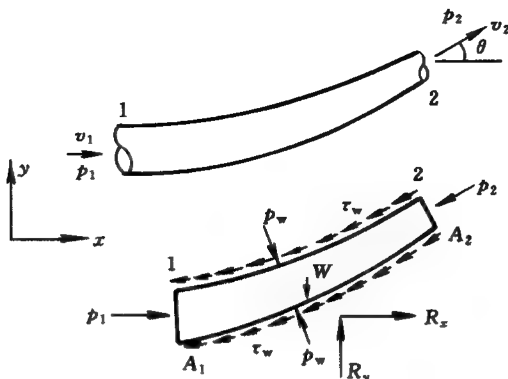


图 4.15　曲管中的流动

取控制体积使包围整个曲管，管壁作用于液体上的力如图所示，其中力 $\boldsymbol{R}$ 在 x 与 y 方向的分量分别为 R_x 与 R_y，应用(4.5.6a)与(4.5.6b)式有

$$p_1A_1 - p_2A_2\cos\theta + R_x = Q_{m2}v_2\cos\theta - Q_{m1}v_1,$$

$$-p_2A_2\sin\theta - W + R_y = Q_{m2}v_2\sin\theta.$$

注意由连续性方程有 $Q_{m1}=Q_{m2}=Q_m$ 并将 R_x 与 R_y 改变符号后即成为液体作用于管壁的力，即

$$-R_x = p_1A_1 - p_2A_2\cos\theta - Q_m(v_2\cos\theta - v_1),$$

$$-R_y = -p_2A_2\sin\theta - W - Q_mv_2\sin\theta.$$

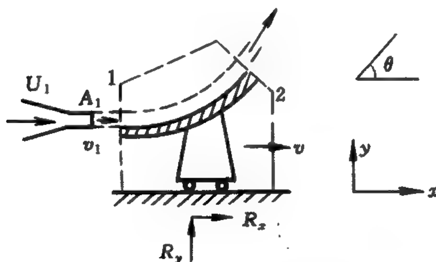


图 4.16　水射流冲击运动曲壁

例 4.14　一出口截面积为 A_1，速度为 v_1 的固定水射流，冲击一转角为 θ 的光滑叶片使其沿水平方向以常速 v 运动，如图 4.16 所示，如果(1)忽略流体的体力和摩擦力，(2)流动相对于叶片为定常的，和(3)叶片在 x 方向相对于射流的速度为 v_1-v，试求使叶片作常速 v 运动时所需作用于叶片上的力.

选择一控制体积随叶片以常速 v 运动，由于控制体积没有加速度，故仍可在惯性坐标系分析问题，但应注意在应用一切原理时一切速度均应用相对于控

制体积的速度,令 R_x 与 R_y 分别为叶片作用于流体上的力在 x 与 y 方向的分量. 由于控制体积周围均为大气压故无净压力,仅需考虑射流的进出口截面 1 与 2. 在截面 1 处沿 x 与 y 方向的相对速度分别为 $v_1 = v_1 - v$ 与 $v_1 = 0$,而在截面 2 处沿 x 与 y 方向的相对速度分别为 $v_2 = (v_1 - v)\cos\theta$ 与 $v_2 = (v_1 - v)\cdot\sin\theta$.

应用动量定理(4.5.6a)与(4.5.6b)式有

$$R_x = v_2 Q_m - v_1 Q_m,$$
$$R_y = v_2 Q_m.$$

而质量流量 $Q_m = \rho A_1(v_1 - v) = \rho A_2(v_1 - v)$,于是上两式变为

$$R_x = \rho A_1 (v_1 - v)^2(\cos\theta - 1),$$
$$R_y = \rho A_2 (v_1 - v_2)\sin\theta$$

和
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}\ .$$

而流体作用于叶片上的力则与此大小相等方向相反.

例 4.15 一漏斗将砂子装上一水平传送带,它的水平速度为 v_c,砂子从漏斗垂直下落的速度为 v_s,其质量流量为 Q_m,初始时刻传送带是空载的,如果忽略驱动系统和滚子的摩擦力,试求当传送带开始装砂时,启动传送带所需的拉力 T.

将砂子的运动看成为流体流动,取控制体积如图 4.17 所示,在初始一段时间内,砂子进入控制体以后,即停留在控制体内,并随传送带一起运动,这时没有砂子流出控制体积,直到砂子运动至传送带的末端,才开始流入容器中. 这是一

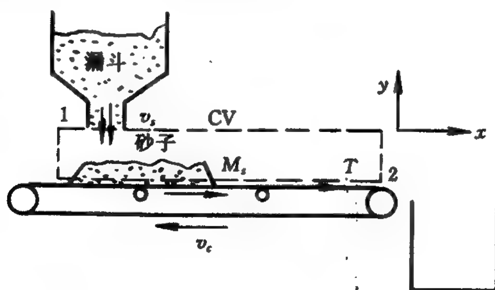


图 4.17 传送带输运砂子

个非定常运动问题,截面 1 与 2 分别取在漏斗出口处与传送带的右末端,显然水平分量 $v_1 = 0$ 和 $v_2 = 0$. 应用动量定理(4.5.5a)式,

$$T = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} v\rho \mathrm{d}\tau + v_2 Q_{m2} - v_1 Q_{m1} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} v_c \rho \mathrm{d}\tau = v_c \frac{\partial M_s}{\partial t} \qquad (4.5.8)$$

其中 M_s 为积留在传送带上的砂子的总质量，v_c 为常速度，从(4.4.4)与(4.4.5)式有连续性方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho d\tau - Q_m = 0,$$

或

$$\frac{\partial M_s}{\partial t} = Q_m. \tag{4.5.9}$$

将(4.5.9)代入(4.5.8)式，最后有

$$T = v_c Q_m.$$

这表明传送带所需的拉力随着砂子的质量流量与传送带的速度的增加而增加.

4.6　动量矩定理及其应用

动量矩定理的一个重要应用领域是带有旋转的流体运动，特别是流体机械中的流动，最常见的有原动机(或涡轮类)和从动机(或泵类)，前者是从流体中吸取能量而后者则是向流体注入能量，涡轮机又分为冲击式与反作用式两大类，冲击式涡轮机是由一或几个高速自由射流(或河渠水流)冲击涡轮机叶片使其旋转，如同射流冲击运动曲壁一样(例 4.14). 反作用涡轮机由一或几组静止与运动相间的叶轮组成，静止叶轮的主要作用是引导流体的运动方向，而运动叶轮则是使流体获得加速度以改变流体的速度和压强. 从而产生驱动叶轮的转矩. 根据流体的运动方向，涡轮机还可分为轴流式，径流式和混合式三类. 一般说来，轴流式能设计出最大流量与最高效率的涡轮机，其次为混流式，最后为径流式.

泵类又分为两类，即用于液体或泥浆的泵和用于气体的风扇，鼓风机或压气机，它们都是用来提高流体的压强的，通常提高大压强采用径流式，如泵，鼓风机或压气机均是，其次用混流式，对提高小压强则采用轴流式.

从第三章(3.7.8a)式，对有限控制体积成立的积分形式的动量矩方程为

$$\Sigma \boldsymbol{T} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}\rho d\tau + \int_{CS}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}\rho\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{A}, \tag{4.6.1}$$

其中 $\Sigma\boldsymbol{T}$ 为作用于控制体积上的一切转矩，它包括由表面力产生的转矩 $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_s$，由重力产生的转矩 $\int_{CV}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{g}\rho d\tau$ 和由转轴产生的转矩 $T_{轴}$ 等，$\boldsymbol{r}$ 为质量或体积(或面积)元相对于坐标系原点的位置矢量，$\boldsymbol{v}$ 为相对于固定或匀速运动控制体积的速度矢量，这是对惯性坐标控制体积的一般动量矩矢量方程.

作为一种近似，如果忽略由于表面力和由于对称性体力所产生的转矩，对于定常运动，(4.6.1)式简化为

$$T_{轴} = \int_{CS} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} \rho \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{A}. \tag{4.6.2}$$

上式的右边为对整个控制表面求质量流量与 $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}$ 的乘积. 与以前一样,如果流体仅在有限处穿过控制表面,则右边变为通过这些表面区的质量流量与 $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}$ 的乘积之和.

在分析转动流体机械时,往往仅用沿转轴方向的分量方程,最方便的坐标系是将柱坐标的 z 轴选来与流体机械的转轴相重合,如果叶轮进出口截面 1 与 2 处,流动都是均匀的(或取平均值),并考虑到与 $\boldsymbol{r}$ 成垂直的速度分量才会产生转矩,于是(4.6.2)式的标量形式为

$$T_{轴} = (r_2 v_{\theta 2} - r_1 v_{\theta 1}) Q_m, \tag{4.6.3}$$

其中 $v_{\theta 1}$ 与 $v_{\theta 2}$ 为流体在截面 1 与 2 处的绝对速度的切向分量,r_1 与 r_2 为 $v_{\theta 1}$ 与 $v_{\theta 2}$ 至转轴的距离,通常速度分量 $v_{\theta 1}$ 与 $v_{\theta 2}$ 的符号是这样选取的,当它们与叶片的速度 v 同方向时取为正,反之为负. 这样,对于泵,风扇,鼓风机或压缩机,$T_{轴}>0$,而对于涡轮机 $T_{轴}<0$,这正对应于对流体功的输入和输出. 方程(4.6.3)是转矩与动量矩之间的最基本关系式,通常称为欧拉涡轮机方程. 它既适用于涡轮机又适用于原动机.

在同样假定条件下,对于非定常运动,从(4.6.1)与(4.6.3)式近似地有

$$T_{轴} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} \rho d\tau + (r_2 v_{\theta 2} - r_1 v_{\theta 1}) Q_m. \tag{4.6.4}$$

例 4.16 从洒水器的下方注入一股高压水流,上行至旋转管处分为二股,各沿旋转臂流动,至末端后,经喷嘴喷出,喷嘴与水平面成 θ 角,其出口截面积为 A_2,旋转臂的半径为 $l/2$,如图 4.18 所示. 取表压,周围为大气,体力平行于转轴故不产生转矩,忽略摩擦损失,假定运动为定常的. 试求当注入水的体积流量为 Q_V 时,旋转臂从水与大气获得的转矩为多少?

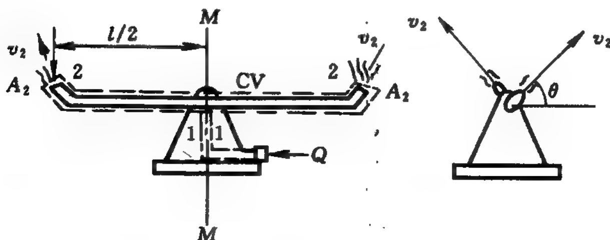


图 4.18 洒水器构造

取控制体积使包围整个旋转臂,在截面 1 与 2 处分别有流体流入和流出,取洒水器的旋转轴 MM 作为轴线,应用动量矩公式(4.6.3)

$$T_{轴}=(r_2 v_{\theta 2}-r_1 v_{\theta 1})Q_m,$$

在截面 1 处，$r_1=0, r_1 v_{\theta 1}=0$，根据连续性方程

$$v_2=\frac{Q_V}{2A_2},\ v_{\theta 2}=\frac{Q_V}{2A_2}\cos\theta \text{ 和 } Q_m=\rho Q_V,$$

代入(4.6.3)式，得

$$T_{轴}=2\times\frac{l}{2}\frac{Q_V}{2A_2}\cos\theta\frac{\rho Q_V}{2}=\frac{l}{4}\rho\frac{Q_V^2}{A_2}\cos\theta.$$

例 4.17　一混流式水泵，其进口与出口直径分别为 R_1 与 R_2，匀速流体轴向地进入水泵后，沿叶片流动，并逐渐地改变为沿径向流出，进口处的速度为 v_1 出口处相对于叶片的径向速度为 v_{r2}，流体的体积流量为 Q_V，叶片出口处的宽度为 b_2，叶轮的转速为 Ω，如图 4.19 所示．如果忽略体力与摩擦力的作用，并假定运动是定常的，试求(a)叶片出口宽度 b_2，(b)输入叶轮的转矩，和(c)输入叶轮的功率．

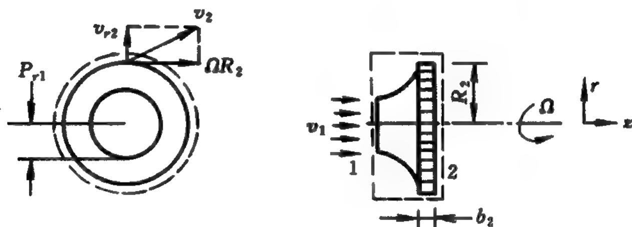


图 4.19　混流式水泵

取控制体积包围整个水泵，如图所示．进出口横截面分别取为 1 与 2．

(a) 根据连续性方程

$$\rho v_1 \pi R_1^2=\rho v_r \cdot 2\pi R_2 b_2=\rho Q_V,$$

其中 v_{r2} 为出口处流体相对于叶片的径向速度，于是

$$b_2=\frac{Q_V}{2\pi R_2 v_{r2}}.$$

(b) 应用动量矩公式(4.6.3)

$$T_{轴}=(r_2 v_{\theta 2}-r_1 v_{\theta 1})Q_m.$$

由于在截面 1 处，切向速度分量 $v_{\theta 1}$ 为零，故不存在动量矩，在截面 2 处，流体的切向速度为 ΩR_2，径向速度(即相对于叶片的速度)为 v_{r2}，它们的合速度为 v_2，如图中所示，其中仅切向速度 $\Omega R=v_{\theta 2}$ 能产生对转动轴的动量矩，于是

$$T_{轴}=R_2\Omega R_2\rho Q_V=\Omega R_2^2\rho Q_V$$

(c) 输入叶轮的功率 $=\Omega T_{轴}=\Omega^2 R_2^2\rho Q_V$

例 4.18 图 4.20(a)为一戽斗式水轮机,它的旋转轴(垂直于纸面)的两端支撑在轴承架上,使水轮机受力后可以自由旋转,在水轮机的边缘上固定一系列戽斗,其平面剖视如图 4.20(b)所示,当一股速度为 v_j 的高速射流冲击在戽斗上时,水流被平分成两部分,并相对于戽斗几乎作 180°的转弯,然后以相对于戽

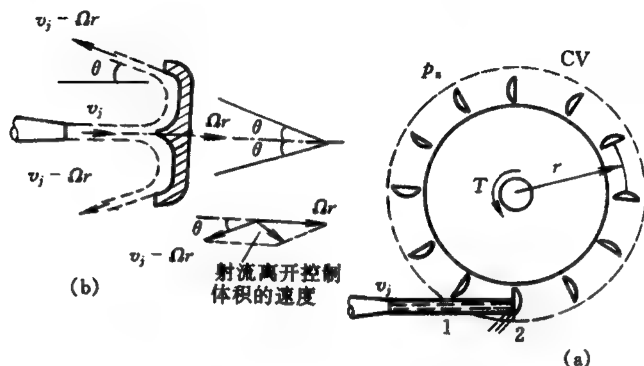


图 4.20 戽斗式水轮机

斗为 $v_j-\Omega r$ 的速度离开,其中 Ω 为水轮机的定常运转速度,r 为水轮机转轴至戽斗中线的半径,如果射流的体积流量为 Q_V,忽略体力与表面力的作用,试求射流对水轮机所产生的转矩和功率.

应当注意两点:(1)当水轮机转动时,每一戽斗相对于射流的位置是在不断变化的,因之,水射流相对于地面并非完全定常的,(2)在不同时刻有不同数目的戽斗从不同的位置与射流相接触使转矩随时间是变化的,但这种变化并不是很大,可以暂时忽略不计,为了简便这里仅计算它的平均转矩,并认为它与一定常射流冲击在一最低位置的戽斗(即此戽斗以常速 Ωr 作水平运动)上所产生的转矩完全相等.

取一控制体积使完全包围整个水轮机,这样它的前后面与转轴相截,动量矩是对水轮机的中心轴线取的,除了与转轴相截处外,控制表面各处均为大气压 p_a,故控制面上的唯一转矩来源是在与转轴相截处,对定常情况应用动量公式(4.6.3)

$$T_{轴}=(r_2v_{\theta2}-r_1v_{\theta1})Q_m,$$

射流在进入控制体积的截面 1 处 $r_1=r, v_{\theta1}=v_j$,射流在离开控制体积的截面 2 处,$r_2=r$,

$$v_{\theta2}=\Omega r-(v_j-\Omega r)\cos\theta=\Omega r(1+\cos\theta)-v_j\cos\theta,$$

将上式代入 $T_{轴}$ 表达式后有

$$T_{轴}=r(\Omega r-v_j)(1+\cos\theta)\rho Q_V.$$

这是转轴作用于水轮机的转矩，而射流作用于水轮机所产生的平均转矩的大小与此相等，方向与此相反，即

$$T_{射} = r(v_j - \Omega r)(1+\cos\theta)\rho Q_V.$$

同时 $$功率 = \Omega T_{射} = \Omega r(v_j - \Omega r)(1+\cos\theta)\rho Q_V.$$

一个重要的问题是 v_j 与 Ω 之间保持何种关系时，功率为最大值. 可以证明这一关系为

$$v_j = 2\Omega r.$$

4.7 能量方程及其应用

从第三章(3.7.10a)式对有限控制体积成立的积分形式的能量方程为

$$Q_h + \frac{dW_m}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} e_s \rho d\tau + \int_{CS}\left(e_s + \frac{p}{\rho}\right)(\rho \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{A}) \qquad (4.7.1)$$

其中 Q_h 为每单位时间通过控制体表面传入(或出)的热流量并取外界加于控制体积的为正，W_m 为外界对控制体积所作的机械功，如机械转轴所作的功等，仍取外界向控制体积作功为正.

$$e_s = \frac{1}{2}v^2 + gy + e$$

为每单位质量流体的储存能，e 为每单位质量流体的内能，$\boldsymbol{v}$ 为相对于固定或匀速运动控制体积的速度矢量，这是对惯性坐标控制体积的一般形式的能量方程.

作为近似，如果忽略由质量力与切向表面力所作的功，而仅保留转轴对控制体积所作的功，并用 W_m 去代表，同时假定运动为定常的，则(4.7.1)式变为

$$Q_h + \frac{dW_m}{dt} = \int_{CS}\left(e_s + \frac{p}{\rho}\right)(\rho \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{A}). \qquad (4.7.2)$$

与以前一样，如果流体仅在有限个表面区穿过控制体积表面，而且在这些表面区流动参数 v、p、ρ 等可以近似地看成为均匀分布的(或取它们的平均值)，则(4.7.2)式右边可改写为

$$\int_{CS}\left(e_s + \frac{p}{\rho}\right)(\rho \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{A}) = \sum_{N=1}^{N} \pm \left(e_s + \frac{p}{\rho}\right)_N Q_{mN}, \qquad (4.7.3)$$

特别地当仅有一进口截面 1 与一出口截面 2 时，考虑到(4.7.3)式，则(4.7.2)式变为

$$Q_h + \frac{dW_s}{dt} = Q_{m2}\left[\frac{1}{2}v_2^2 + \frac{p_2}{\rho_2} + gy_2 + e_2\right] - Q_{m1}\left[\frac{1}{2}v_1^2 + \frac{p_1}{\rho_1} + gy_1 + e_1\right]. \qquad (4.7.4)$$

在同样假定条件下,对非定常运动从(4.7.1)与(4.7.3)式有

$$Q_h + \frac{dW_s}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} e_s \rho d\tau \pm \sum_{N=1}^{N} \pm Q_{mN}\left(e_s + \frac{p}{\rho}\right)_N. \qquad (4.7.5)$$

例 4.19 利用水力的一个重要方面是兴建水库,发展水力发电,一发电站位于水坝下方,上游的水头高为 H,每秒有体积流量为 Q_V 的水通过涡轮机,下游排水道出口处的速度为 v_2,全部排水均泄入下游河道上方,如果忽略一切损失,流动是定常的. 试求涡轮机所能产生的理想功率,当涡轮机的效率为 80%时,实际功率又是多少?

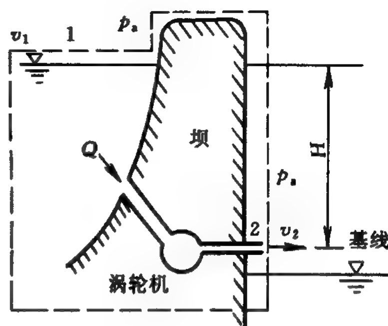


图 4.21 水力发电

取控制体积包围整个坝体,基线取在排水通道中线上,如图 4.21 所示. 在截面 1 与 2 处应用能量关系式(4.7.4). 并注意上下游的水面上方均为大气压 p_a,$Q_{m1}=Q_{m2}=Q_m$ 和水库的容水量很大,上游液面下降速度几乎为零,以及 $e_1=e_2$,$Q_h=0$ 等,于是有

$$\frac{dW_s}{dt} = \frac{1}{2}v_2^2 Q_m - Q_m gH,$$

这是涡轮机加于流体的功率,而流体作用于涡轮机的功率为

$$\frac{dW_s}{dt} = Q_m\left[gH - \frac{1}{2}v_2^2\right].$$

这也是涡轮机能产生的理想功率,这一结果表明对给定的 Q_m,上游水头 H 愈高,下游排水速度 v_2 愈小,则所产生的功率愈大,而

$$实际功率 = 0.8Q_m\left[gH - \frac{1}{2}v_2^2\right].$$

例 4.20 在工农业生产中常常利用泵将低处的液体提升至高处,如图 4.22 中所示,将液体从低管提升至高管,在二管中各取一截面 1 与 2,它们的面积与平均速度分别为 A_1,A_2 与 v_1,v_2,它们的中心线距 U 形管的低液面高分别为 y_1 与 y_2. 用静压管与皮托管测 1,2 处的静压与总压分别为 p_1 与 $p_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2$. U 形管内的液面差为 y_m,内盛液体的密度为 ρ_m,假定流动为绝热的,忽略管路和泵的一切损失,如果体积流量为 Q_V,试求泵所需的功率.

取控制体积包围泵和附近管道如图 4.22 所示,应用能量方程(4.7.4)于 1,2 截面处,注意 $Q_h=0$,$e_1=e_2$ 和 $Q_m=\rho Q_V$,于是有

$$\frac{dW_s}{dt} = Q_V\left[p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + gy_2\rho\right] - Q_V\left[p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + gy_1\rho\right]. \qquad (4.7.6)$$

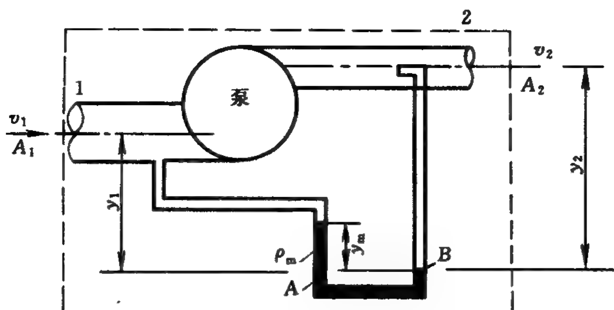


图 4.22 用泵提升液体

考虑到过 U 形管低液面的水平面上,A,B 两点的压强应相等,即

$$p_1 + \rho g(y_1 - y_m) + \rho_m g y_m = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

或 $$p_1 + \rho g y_1 - \left(p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2\right) = g y_m(\rho - \rho_m),$$

代入(4.7.6)式后有

$$-\frac{dW_s}{dt} = Q_V\left[\frac{1}{2}\rho\frac{Q_V^2}{A_1^2} + g y_m(\rho - \rho_m)\right].$$

这就是泵所需的功率.

例 4.21 一压气机作定常运转,其进出口条件如图 4.23 所示,质量流量为 Q_m,输入压气机的功率为 P,假定(1)进出口截面的流动参数是均匀分布的,(2)空气为理想气体,(3)忽略压气机的损失,(4)进口处的速度 $v_1=0$. 试求每单位时间传给空气的热量.

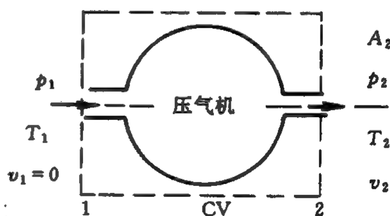


图 4.23 压气机

取控制体积包围整个压气机和进出口道如图 4.23 所示. 令进出口截面分别为 1 与 2,和单位质量流体的焓 $i = e + \frac{p}{\rho}$,于是能量方程(4.7.4)简化为

$$Q_h + P = Q_m\left[(i_2 - i_1) + \frac{1}{2}v_2^2 + g(y_2 - y_1)\right].$$

对理想气体与 $c_p=$常数,有 $i_2 - i_1 = c_p(T_2 - T_1)$,另外 $y_2 = y_1$,则上式变为

$$Q_h = Q_m\left[c_p(T_2 - T_1) + \frac{1}{2}v_2^2\right] - P.$$

利用 $v_2=\dfrac{Q_m}{\rho_2 A_2}$ 与 $p_2=\rho RT_2$，于是 $v_2=\dfrac{Q_m}{A_2}\cdot\dfrac{RT_2}{p_2}$，随之上式变为

$$Q_h=Q_m\left[c_p(T_2-T_1)+\frac{1}{2}\left(\frac{Q_m}{A_2}\cdot\frac{RT_2}{p_2}\right)^2\right]-P.$$

例 4.22 一体积为 V_T 的高压容器与一高压管路相连，两者的初始温度均为 T_0，容器的压强为 p_T，管路的压强为 p_L，且 $p_L>p_T$，假定管路足够大，以致可以认为它的温度与压强均为常数，容器的温度用一快速响应热电偶监测，阀门开启后的一瞬间，容器的温度以 c 的速率上升. 如果(1)忽略势能与热传导，(2)气体为理想气体，(3)管路和容器中的气体速度均很小可以忽略不计，(4)在任何时刻容器中流体性质是均匀的，试求在 $t=0^+$ 时刻，空气进入容器的瞬时质量流量 Q_m.

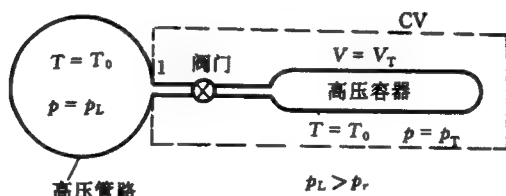


图 4.24 高压容器充气

取控制体积如图 4.24 所示，空气仅由截面 1 处进入容器，这是一个非定常问题，应用能量方程(4.7.5)，

$$Q_h+\frac{dW_s}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\left[\frac{1}{2}v_1^2+gy_1+e_1\right]\rho d\tau-$$

$$Q_m\left[\frac{1}{2}v_1^2+\frac{p_1}{\rho_1}+gy_1+e_1\right].$$

由于 $Q_h=0,\dfrac{dW_s}{dt}=0,v_1=0,y_1=0$，同时注意容器内的流体性质是均匀的，$\dfrac{\partial}{\partial t}$ 可用 $\dfrac{d}{dt}$ 去置换，于是，上式简化为

$$\frac{d}{dt}[e_1 M_T]-Q_m\left[\frac{p_1}{\rho_1}+e_1\right]=0$$

或

$$e_1\frac{dM_T}{dt}+M_T\frac{de_1}{dt}-Q_m\left[\frac{p_1}{\rho_1}+e_1\right]=0, \tag{4.7.7}$$

其中 M_T 为高压容器内的空气质量.

其次利用连续性方程(4.4.4)

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho d\tau - Q_m = 0$$

或
$$\frac{dM_T}{dt} = Q_m,$$

代入(4.7.7)式,

$$M_T\frac{de_1}{dt} - Q_m\frac{p_1}{\rho_1} = 0.$$

对理想气体$\frac{p_1}{\rho_1} = RT$, $de_1 = c_V dT_1$,并注意到 $M_T = \rho V$,于是

$$Q_m = \frac{\rho V_T c_V \frac{dT_1}{dt}}{RT_1}.$$

当 $t = 0^+$ 时, $T_1 = T_0$, $\frac{dT_1}{dt} = \left(\frac{dT}{dt}\right)_0 = c$, $\rho = \rho_T = \frac{p_T}{RT_0}$,于是

$$Q_m = \frac{p_T V_T c_V c}{(RT_0)^2}.$$

4.8 各积分关系式的综合应用

前面几节讨论了各种单一积分关系式的应用. 在工程实践中,有时为了解决更复杂的问题,往往需要同时使用几个关系式,或者将这些关系式与其它的原理结合起来使用,这里举几个例子.

例 4.23 射流泵是一种利用射流提高流体压强和速度的装置. 它的结构如图 4.25 所示. 圆管中的流体以匀速 v_1 运动,圆管的横截面积为 A_2,一高速射流沿圆管中心线射出,它的出口速度与横截面积分别为 v_j 与 A_j. 如果圆管中的流体与射流为同一种流体,忽略壁摩擦并假定运动为一维的,试求:(a)混合后的平均速度,(b)混合前后的压强变化和机械能耗损率.

(a) 取控制体积使包围整个混合区,其进出口截面分别为 1 与 2. 应当注意通过截面 2 的流体包括圆管与射流流动的流体,同时 $A_1 = A_2 - A_j$,根据连续性方程,

$$v_1 A_1 + v_j A_j = v_2 A_2 \quad 或 \quad v_2 = \frac{v_1 A_1 + v_j A_j}{A_2}. \tag{4.8.1}$$

(b) 假定在截面 1 处射流与圆管流的压强相等,应用动量定理,

$$(p_1 - p_2)A_2 = \rho v_2^2 A_2 - \rho v_1^2 A_1 - \rho v_j^2 A_j, \tag{4.8.2}$$

将(4.8.1)式代入(4.8.2)式有

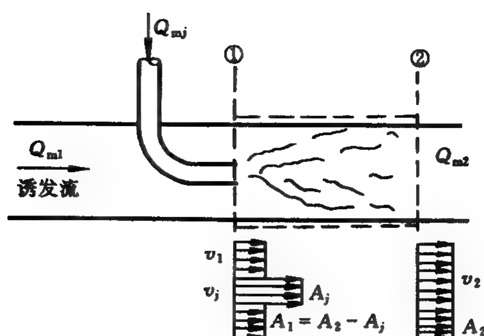


图 4.25 射流泵原理

$$p_1 - p_2 = \rho\left[\left(\frac{v_1 A_1 + v_j A_j}{A_2}\right)^2 - v_1^2\frac{A_1}{A_2} - v_j^2\frac{A_j}{A_2}\right].$$

(c) 在外界不对流体作功和不向流体加热或减热的情况下，流体机械能的耗损表现为其内能 e 的变化，首先对射流在截面 1 与 2 处应用能量定理有

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}v_j^2 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2}v_2^2 + (e_2 - e_j). \tag{4.8.3}$$

其次，对圆管来流在截面 1 与 2 处应用能量定理有

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}v_1^2 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2}v_2^2 + (e_2 - e_1), \tag{4.8.4}$$

而每单位时间内总的能量耗损为

$$\frac{dE}{dt} = Q_{m1}(e_2 - e_1) + Q_{mj}(e_2 - e_j).$$

将(4.8.3)与(4.8.4)式代入上式后有

$$\frac{dE}{dt} = Q_{m1}\left[\frac{p_1 - p_2}{\rho} + \frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2)\right] + Q_{mj}\left[\frac{p_1 - p_2}{\rho} + \frac{1}{2}(v_j^2 - v_2^2)\right].$$

例 4.24 一绕溢洪堰的流动，如图 4.26 所示. 其上游压强与高度头之和为 H_1，体积流量为 Q_V，如果，(1)忽略一切摩擦阻力，(2)上、下游远处均为一维流动，流速是均匀分布的，(3)压强按静压强分布，试求：(a)下游压强与高度头之和 H_2，(b)作用在堰上的力的大小和方向.

(a) 取流线 s，在截面 1 与 2 处应用伯努利积分

$$\frac{1}{2}\frac{v_1^2}{g} + h_1 + y_1 = \frac{1}{2}\frac{v_2^2}{g} + h_2 + y_2,$$

其中 $h_1 = \dfrac{p_1}{\rho g}$, $h_2 = \dfrac{p_2}{\rho g}$. 上式亦可写为

$$\frac{1}{2}\frac{v_1^2}{g} + H_1 = \frac{1}{2}\frac{v_2^2}{g} + H_2. \tag{4.8.5}$$

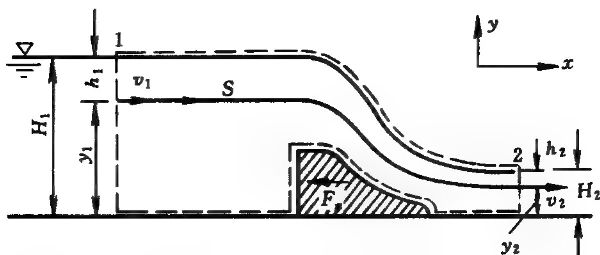


图 4.26　溢洪堰流动

取单位宽(垂直于纸面),连续性方程为

$$Q_V = v_1 H_1 = v_2 H_2 .$$

利用此结果同时令

$$A = \frac{1}{2}\frac{v_1^2}{g} + H_1 ,$$

则(4.8.5)式变为

$$A - H_2 = \frac{Q_V^2}{2gH_2^2} ,$$

整理后有

$$H_2^3 - AH_2 + \frac{Q_V^2}{2g} = 0 .$$

这是一个对 H_2 的三次代数方程,当 Q_V 及 A 已知时,可用图解法或代数法求得 H_2.

(b) 取控制体如图 4.26 所示,令每单位溢洪堰宽作用于流体的力为 F_x,作用于截面 1 与 2 处的压强(单位宽)分别为 $\frac{1}{2}\rho g H_1 \cdot H_1$ 与 $\frac{1}{2}\rho g H_2 \cdot H_2$,在截面 1 与 2 处应用动量定理有

$$\frac{1}{2}\rho g[H_1^2 - H_2^2] - F_x = Q_m(v_2 - v_1)$$

或

$$F_x = \frac{1}{2}\rho g[H_1^2 - H_2^2] - Q_m(v_2 - v_1),$$

其中 $Q_m = \rho Q_V$, $v_2 = \frac{Q_V}{H_2}$, $v_1 = \frac{Q_V}{H_1}$ 均为已知量,故可算出 F_x. 但应注意这是溢洪堰作用于流体的力,而流体作用于溢洪堰的力则应大小与此相等,方向相反.

螺旋桨是一种推动物体(如航空器、船舰等)在流体中前进的装置,它起源于我国晋代葛洪(284—363)所发明的“竹蜻蜓”. 这是目前举世公认的. 螺旋桨通常由两个以上的叶片构成,对不同的用途叶片的外形和剖面形状是不同的. 如图 4.27,(a)为航空用螺旋桨,(b)与(c)分别为低速与高速船舰用螺旋桨,它的

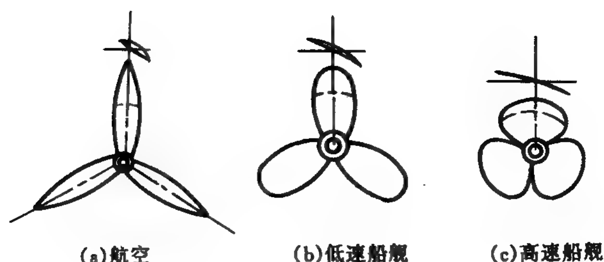


图 4.27　螺旋桨

工作原理是发动机或电动机带动螺旋桨旋转以后，不断对流体增加能量，以提高其速度和压强，从而导致流体动量的变化以产生推力.

根据相对性原理一螺旋桨以常速 v 在静止流体中运动，其作用相当于一流速为 v 的流体流过一静止的螺旋桨，图 4.28 正是这一情况.

在远离螺旋桨上游的截面 1 处，螺旋桨对流体的影响很小，来流的压强为 p_1，速度为匀速 v_1，流动逐渐趋近螺旋桨后，速度不断增加，压强逐渐减小，此加速区的边界称为滑流边界，及至螺旋桨前侧，其速度为 v_2 压强为 p_2，同时，由于螺旋桨的旋转，上游流体出现扭转现象，流体通过螺旋桨时，它对流体加入能量使压强提高至 p_3 而速度则保持不变，即 $v_3=v_2$(由于连续性). 以后，速度继续增加，压强不断减小，直至远离螺旋桨下游的截面 4 处，滑流速度达到 v_4，而压强 p_4 降至与 p_1 相等的数值.

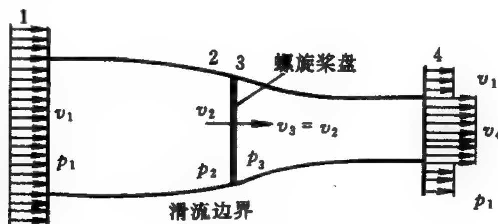


图 4.28　绕螺旋桨的流动

例 4.25　一速度为 v_1 的均匀来流流过一直径为 D 的螺旋桨，其质量流量为 Q_m，远离螺旋桨下游截面 4 处的滑流速度已测得为 v_4. 假定(1)螺旋桨有许多桨叶以致可以将其看成为一圆形桨盘，其厚度可忽略不计，(2)忽略由于螺旋桨旋转而引起的流体扭转，(3)推力均匀分布在桨盘上，(4)除桨盘处有压强间断外，螺旋桨上下游流场均可近似地看成为无旋的，于是可分别应用伯努利积分. 试求：(a)推力，(b)通过桨盘时的流体速度，(c)螺旋桨的输入与输出功率，(d)螺旋桨的理论机械效率 .

取滑流边界,截面 1 与 4 作为控制体表面,在此之外,速度为匀速 v_1,压强为 p_1

(a) 在截面 1 与 4 处应用动量定理有推力

$$T=Q_m(v_4-v_1). \tag{4.8.6a}$$

也可在截面 2 与 3 处应用动量定理,

$$T+(p_2-p_3)A=0, \tag{4.8.6b}$$

其中 A 为桨盘面积,

(b) 在截面 1 与 2 和 3 与 4 分别应用伯努利积分有

$$p_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2=p_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2, \tag{4.8.7}$$

$$p_3+\frac{1}{2}\rho v_3^2=p_4+\frac{1}{2}\rho v_4^2. \tag{4.8.8}$$

由于 $Q_m=\rho v_2 A$,从(4.8.6a)与(4.8.6b)式有

$$\rho v_2(v_4-v_1)=p_3-p_2. \tag{4.8.9}$$

注意 $p_4=p_1$,从(4.8.7)与(4.8.8)式有

$$\frac{1}{2}\rho(v_4^2-v_1^2)=p_3-p_2. \tag{4.8.10}$$

令(4.8.9)与(4.8.10)两式相等,有

$$v_2=\frac{1}{2}(v_4+v_1).$$

这表明通过螺旋桨的速度为上下游速度的平均值.

(c) 以速度 v_1 在静止流体中运动的螺旋桨,每单位时间所输出的功,或称推力功率 P_0 为

$$P_0=Tv_1=\rho Q_V(v_4-v_1)v_1.$$

在截面 1 与 4 处应用能量定理,并注意到 $p_4=p_1$, $y_1=y_2$,

$$\frac{\mathrm{d}W_s}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}(v_4^2-v_1^2).$$

将流体从 v_1 增加至 v_4 所需要输入螺旋桨的功率

$$P_1=Q_m\frac{1}{2}(v_4^2-v_1^2)=\rho Q_V v_2(v_4-v_1).$$

(d) 螺旋桨的理论机械效率 η,

$$\eta=\frac{P_0}{P_1}=\frac{v_1}{v_2}.$$

如果用滑流速度的增加量 $\Delta v=v_4-v_1$ 来表示,则

$$\eta=\frac{1}{1+\dfrac{\Delta v}{2v_1}}.$$

明渠流系指渠道或河道中具有自由表面的水流,它在水利工程中是一种很常见而又非常重要的流动,在这类流动中需要考虑重力,惯性力和粘性阻力的相互作用,通常可近似地把它看成一维流动,它的流动状态随弗劳德数 $Fr=v/\sqrt{gh}$ 而异,其中 v 为过水断面上的平均流速,h 为该处水深,g 为重力加速度,弗劳德数代表惯性力与重力之比. 当 $Fr<1$ 时,重力起主要作用,称为亚临界流,$Fr>1$ 时,惯性力起重要作用,称为超临界流,$Fr=1$ 时为临界流,此时的深度称为临界深度,浅水重力波的传播速度为 $\sqrt{gh}$. 因之,在亚临界区,波速大于流速,渠中障碍物所产生的扰动会传播至上游使水位升高,在超临界区障碍物所产生的扰动,无法传播至上游以提高水位,于是,在障碍物附近形成水面突然跃起,称为水跃现象,水跃区为一斜面,它由两部分组成,上表面为水流翻泡渗空气的旋涡区,而下部分则为急剧扩展的主流,两者之间有大量的动量和质量交换,交界面上流速梯度很大,湍动渗混剧烈,水跃现象实际上是将超临界流动的动能转变为亚临界流动的势能和热能,这一现象首先于 1819 年被 G. 比唐发现,1838 年 J.S. 比朗格获得计算水面升高的表达式.

例 4.26 一定常明渠流动在某处出现水跃现象,跃前与跃后的速度与水深分别为 v_1, y_1 与 v_2, y_2 如图 4.29 所示,实验表明水跃区的范围相当短,约为 y_2 的 6 倍,在这样短的范围内与水的压强相比底面的摩擦力可以忽略不计,同时假定(1)流动为一维均匀流即各截面上的流动参数是均匀分布的,(2)忽略流体的体力,(3)压强按静压分布规律,即

$$p=p_a+\rho g(y_s-y),$$

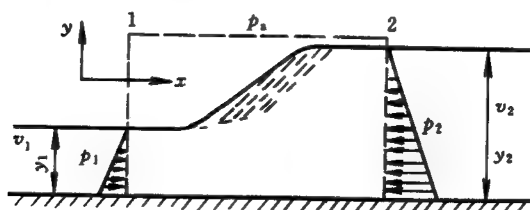


图 4.29 水跃现象

其中 p_a 为大气压,y_s 为水面高,如果 v_1 与 y_1 已知,求 y_2 与能量损失 h_f.

为了方便,取垂直于纸面的渠道宽为 1,所取控制体积如图 4.29 所示. 应用动量定理于截面 1 与 2 有

$$p_1A_1-p_2A_2=Q_m(v_2-v_1).$$

利用静压规律和连续性条件,上式可改写为

$$\frac{1}{2}\rho g\left[y_1^2-y_2^2\right]=v_1^2\rho\left[\frac{y_1^2}{y_2}-y_1\right],$$

经整理后，可变为

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2+\left(\frac{y_2}{y_1}\right)-2Fr_1^2=0, \tag{4.8.11}$$

其中 $Fr_1^2=v_1^2/gy_1$，脚标 1 代表跃前的 v_1 与 y_1. 解上式可得

$$\frac{y_2}{y_1}=\frac{-1+\sqrt{1+8Fr_1^2}}{2}. \tag{4.8.11a}$$

这里因 y_2/y_1 应为正，故取正号. 若 Fr_1 及 y_1 已知即可由此式求出 y_2. 实验证明这一公式的误差在 1% 以内. 从上式可以看出，当 $Fr_1>1$ 时，$y_2>y_1$，$Fr_1=1$ 时，$y_2=y_1$，而当 $Fr_1<1$ 时，初看似乎为 $y_2<1$，但这实际上是不可能的，因为这意味着增加了机械能，从而违反了热力学第二定律，下面的分析可以清楚地说明这点.

其次，应用能量定理来估计水跃的能量损失 h_f，由于液面上方均为大气压 p_a，故沿液面有

$$\frac{v_1^2}{2g}+y_1=\frac{v_2^2}{2g}+y_2+h_f$$

或

$$h_f=\frac{v_1^2}{2g}-\frac{v_2^2}{2g}+y_1-y_2.$$

利用连续方程

$$v_2=\frac{v_1y_1}{y_2},$$

于是

$$\frac{h_f}{y_1}=\frac{Fr_1^2}{2}\left[1-\left(\frac{y_1}{y_2}\right)^2\right]+\left[1-\frac{y_2}{y_1}\right].$$

将(4.8.11)式代入，消去 Fr_1^2，并乘以和除以 $\frac{y_2}{y_1}$ 以后有

$$\frac{h_f}{y_1}=\frac{1}{4}\frac{\left[\frac{y_2}{y_1}-1\right]^3}{\frac{y_2}{y_1}}. \tag{4.8.12}$$

另一面，截面 1 处的比能量(即每单位重量流体的能量)

$$E_1=\frac{v_1^2}{2g}+y_1=\frac{y_1}{2}[Fr_1^2+2]$$

或

$$\frac{E_1}{y_1}=\frac{Fr_1^2+2}{2}. \tag{4.8.13}$$

(4.8.12)与(4.8.13)式相除后有

$$\frac{h_f}{E_1}=\frac{1}{2}\frac{\left[\frac{y_2}{y_1}-1\right]^3}{\frac{y_2}{y_1}\left[Fr_1^2+2\right]}.$$

再将(4.8.11a)式代入经整理后得

$$\frac{h_f}{E_1}=\frac{[\sqrt{1+8Fr_1^2}-3]^3}{8[\sqrt{1+8Fr_1^2}-1][Fr_1^2+2]}.$$

这式代表每单位重量流体的能量损失与其所含能量之比，它是 Fr_1 的函数，当 $Fr_1<1$ 时，此式将给出 h_f 为虚数，这是与实际情况不符的，故 Fr_1 必须大于 1 才会发生水跃.

例 4.27 图 4.30(a)与(b)为一洒水器的斜视与俯视图，它的喷嘴与切线成 θ 角，运转时从水平面向上向外喷水，转臂半径为 R，横截面积为 A_0，体积流量为 Q_V，轴承与密封引起的阻抗转矩为常数 T_0，空转臂的旋转惯性矩为 I_s，旋转角速度为 Ω，当启动洒水器时，Ω 是随时间变化的，$t=0$ 时，Ω 为零，试求 Ω 随时间的变化关系.

取柱形控制体积使包围整个旋转臂部分，进口流体沿轴向进入转臂，且转臂及其内部流体的重量均平行于转轴，故不产生动量矩，应用动量矩定理(4.6.4)，

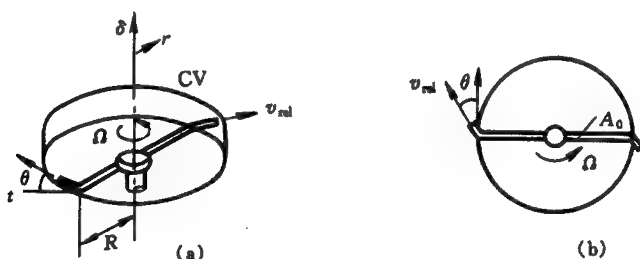


图 4.30 洒水器

$$-T_0=\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}\rho d\tau+(r_2v_{\theta2}-r_1v_{\theta1})Q_m,$$

其中左边取负号系因 T_0 为阻抗转矩. 应当注意右边的体积分需包括两个部分，即下式中的右边第一与第二项，

$$-T_0=\text{转臂的动量矩时间变化率}+\text{转臂内流体的动量矩时间变化率}$$
$$+\text{从控制体积流出的净的射流的动量矩}, \qquad (4.8.14)$$

其中右边第一项为

$$I_s\frac{d\Omega}{dt},$$

右边第二项为

$$2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^R A_0 r\mathrm{d}r\rho(\Omega r)=2\rho A_0\frac{R^3}{3}\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}.$$

由于转臂以 Ω 角速度旋转，$v_{\theta 2}=v_{\mathrm{rel}}\cos\theta-\Omega R$，其中 $v_{\mathrm{rel}}=Q_V/2A_0$，于是右边第三项为

$$\rho Q_V R[v_{\mathrm{rel}}\cos\theta-\Omega R].$$

将这些结果代入(4.8.14)式，并经整理后有

$$A\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}+B\Omega-C=0, \tag{4.8.15}$$

其中

$$A=I_s+\frac{2}{3}\rho A_0 R^3,$$

$$B=\rho Q_V R^2,$$

$$C=\rho Q_V R v_{\mathrm{rel}}\cos\theta-T_0$$

均为已知数，这样(4.8.15)式为一阶常微分方程. 利用初始条件 $t=0,\Omega=0$ 后，它的解为

$$\Omega=\frac{C}{B}[\mathrm{e}^{-\frac{B}{A}t}-1].$$

其次，求何时 Ω 始成为常数.

$$\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}=\frac{BC}{A^2}\mathrm{e}^{-\frac{B}{A}t}=0,$$

即从理论上说 $t\to\infty$ 时 Ω 始成为常数.

例 4.28　从地面垂直发射一初始质量为 M_0 的火箭，开始燃烧后，每单位时间燃料消耗量为 $\dot{m}_f$，喷入大气的喷气相对于火箭的速度为 v_j，如果忽略空气阻力，试求：(a)火箭的初始加速度，(b) t 时间后火箭的速度.

取一随火箭运动的坐标系 xyz 和控制体积，另取一固定坐标系 XYZ，如图 4.31 所示.

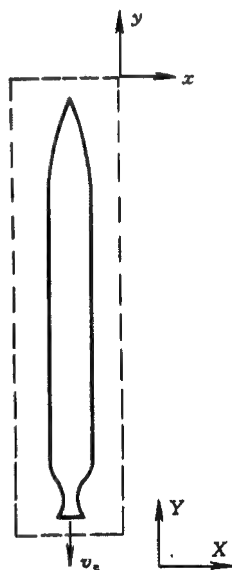


图 4.31　火箭发射

(a) 由于火箭是以加速度向上运动的，除了受重力影响外，还受惯性力的影响，它们的方向均向下，其大小分别为

$$\begin{aligned}F_g&=-Mg=-(M_0-\dot{m}_f t)g,\\ F_1&=-a_{XYZ}M=-a_{XYZ}(M_0-\dot{m}_f t),\end{aligned} \tag{4.8.16}$$

其中 M 为火箭的瞬时质量，它是时间的函数，根据连续性方程有 $M=M_0-\dot{m}_f t$. a_{XYZ} 为火箭相对于固定坐标 XYZ 的垂直加速度，于是在运动坐标系 xyz

应用动量定理有

$$F_g + F_1 = \frac{d}{dt}\int_{CV} v_{XYZ}\rho d\tau + \int_{CS} \rho \boldsymbol{v}_{XYZ} \cdot d\boldsymbol{A} \qquad (4.8.17)$$

其中右边第一项为控制体积内每单位时间动量在 y 方向相对于控制体积的变化，考虑到未燃燃料与火箭结构相对于火箭并无动量变化，而正在燃烧的燃料所引起的动量变化也极小，因之，可近似地认为

$$\frac{d}{dt}\int_{CV} v_{XYZ}\rho d\tau \doteq 0. \qquad (4.8.18)$$

右边第二项为通过控制体积表面的净动量变化

$$\int_{CS} \rho \boldsymbol{v}_{XYZ} \cdot d\boldsymbol{A} = -v_e \dot{m}_f. \qquad (4.8.19)$$

将(4.8.16)，(4.8.18)和(4.8.19)式代入(4.8.17)式有

$$-(g + a_{XYZ})(M_0 - \dot{m}_f t) = -v_e \dot{m}_f$$

或

$$a_{XYZ} = \frac{v_e \dot{m}_f}{M_0 - \dot{m}_f t} - g.$$

(b) 根据定义 $a_{XYZ} = \frac{dv_{XYZ}}{dt}$，其中 v_{XYZ} 为火箭相对于固定坐标系的速度，于是有

$$\frac{dv_{XYZ}}{dt} = \frac{v_e \dot{m}_f}{M_0 - \dot{m}_f t} - g,$$

积分，

$$v_{XYZ} = \int_0^{v_{XYZ}} dv_{XYZ} = \int_0^t \frac{v_e \dot{m}_f}{M_0 - \dot{m}_{ft}} dt - \int_0^t g dt$$

$$= v_e \ln\left[\frac{M_0}{M_0 - \dot{m}_f t}\right] - gt.$$

小　结

本章的主要内容包括两部分，一部分是将无粘性流体的兰姆－葛罗米柯方程在流体正压和体力有势的情况下作进一步简化，并对定常与无旋流动可以分别直接积分为著名的伯努利与拉格朗日积分．另一部分是将积分形式的连续、动量、动量矩和能量方程直接应用于流体中的有限控制体积，在定常均匀流动的假定条件下，可获得流动参数的简单近似表达式，为了说明这些积分关系式的应用，本章还列举了 28 个在航空、水利、机械、计量等工程和日常生活中的应用例子．

*实验中的发现

(五) 托里拆里原理

在自然界、工程技术和日常生活中,存在着许多与容器排水有关的问题,例如大尺度的有水库排洪、湖泊引灌,小尺度的有滴漏计时,储罐给水等,所以这类问题一直是力学家与工程师的研究对象.

在 G. 伽利略(1564—1642)成功地解决了自由落体与抛射体问题之后,E. 托里拆里(1608 - 1647)也用实验方法来研究容器出流时的射流形状、速度和流量问题,获得了具有里程碑性质的结果,他实际上是第一个研究流体动力学问题的人.

托里拆里用一盛满水的容器,在其底部附近的侧壁上开一小孔,插入各种外形的短管,如直管与 90°弯管等. 进行实验时,他首先发现插入短管后射流流动“增强”了. 通过仔细观察与测量,他又发现对一给定直短管,从射流与底面的接触点至小孔在底面上的投影点之间的距离 L 与小孔中心至容器内自由面之间的距离 H(即水柱高)成正比. 同时还证明射流的形状为一抛物线.

为了研究射流的排放速度和它所能达到的最大高度,托里拆里将直短管换为 90°弯管,并使出口向上,通过实验他发现射流所能达到的最大高度略低于水柱高度 H,经过分析,他把这一微下差异归因于(1)小孔与短管的摩擦阻力和(2)周围空气对射流的阻力,于是他认为如果不考虑这些阻力的影响,射流应达到容器内自由面的高度 H. 他还进一步发现射流的速度 v_j 与一物体从自由面自由下落至小孔时(距离为 H)所达到的速度 v_f 成正比,即 $v_j \sim v_f$,根据落体定律 $v_f \sim t$ 和距离 $H \sim t^2$,其中 t 为时间,于是有 $H \sim v_f^2$ 或 $v_f \sim \sqrt{H}$,随即有 $v_j \sim \sqrt{H}$,亦即射流速度 v_j 与水柱高度 H 的平方根成正比. 约 100 年后,J. 伯努利(1667—1748)与 D. 伯努利(1700—1782)才精确地确定这一比例常数为$\sqrt{2g}$,g 为重力加速度. 于是最后有 $v_j = \sqrt{2gH}$. 这就是所谓的托里拆里原理.

对于小孔开在容器底面的出流问题,通过观察与测量,托里拆里发现容器排空所需的时间与初始自由面高度 H 的平方根成正比. 同时如果把排空时间等分为 n 个单位时间,并令第 n(即最后一)个单位时间的流量为 1,则第 $n-1, n-2, n-3, \cdots$ 个单位时间的流量分别为 $3, 5, 7, \cdots$ 等,即按奇数顺序增加.

(六) 伯努利定理

刚体运动中的势能守恒原理早在 16 世纪即已牢固确立. 1690 年 C. 惠更斯(1629—1695)在研究二相同弹性体的碰撞时发现碰撞前后运动能 mv^2 不变,即遵循运动能守恒原理,这一发现受到当时著名科学家 G.W.F. 莱布尼兹(1646—1716)和 J. 伯努利(1667—1748)的支持,同时,他们也正从事势能与运动能之间是否存在互换性的探索,正是在这种情况下,D. 伯努利(1700—1782)将固体运动中的这些守恒原理未加证明地,大胆地应用到流体运动中来,并且认为这两种形式的能量是可以互换的. 他的做法是用这些原理分析容器孔口出流问题,然后用大量实验来检验这些分析结果是否正确. 所以这实际上是先提出一些假说,再用实验来证明这些假说是否正确.

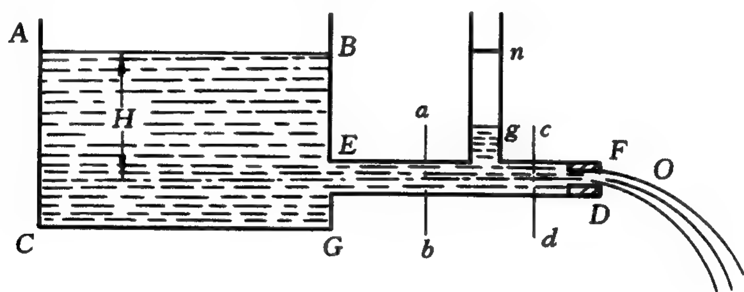


图 4.32 伯努利的容器排水图

1738 年 D. 伯努利为了研究排水容器系统中管道所受的压力(当时尚无压强这一概念),他考虑一横截面积很大的容器 *ACGEB*,如图 4.32 所示,假定任何时候均使容器保持盛满流体,并在它的底部附近安插一段水平圆管 *ED*,管的末端有一盖,盖的中心有一小孔 *O*,流体通过此小孔以常速流出. 令自由面至小孔中心的高度为 *H*,圆管与小孔的横截面积分别为 A_p 与 A_o,它们的比值为 $n=\frac{A_p}{A_o}$,假定 $n\gg1$. 当流动变为定常以后,根据 E. 托里拆里(1608—1647)原理射流的速度为一常数,且与 $\sqrt{H}$ 成正比,假定运动是一维的,即在运动的垂直方向将流体分为薄层,同一层中的流体质点以相同的速度运动. 根据体积流量守恒原理,任何地方的流体速度与横截面积成反比. 当没有盖子时,管中的速度与 $\sqrt{H}$ 成正比. 加上盖子以后,管中的速度变为与 $\frac{\sqrt{H}}{n}$ 成正比,而 $\sqrt{H}>\frac{\sqrt{H}}{n}$,故盖子 *FD* 是个障碍物. 现在来考虑它的逆过程,即先加上盖子,然后突然将盖子去掉,管内的流体速度将从 $\frac{\sqrt{H}}{n}$ 变为 $\sqrt{H}$,即有一加速过程,此过程中所产生的超

压,即为作用于管壁上的压力,它是与加速度成正比的,为了求得此加速度必须借助于考虑容器 $ABECDC$ 部分的流动,以求得管道中一小流体元 $abcd$ 的加速度.

令管道 Ec 段与 ac 段的长度分别为 l 与 $\mathrm{d}x$,Ed 段内的变速度为 v,试设想 $abcd$ 这部分流体由管中排走时,容器中将有同体积的流体经过 EG 进入管中填补,这部分流体的体积为 $A_p\mathrm{d}x$,由于容器的横截面积很大,当盖子未去掉时,EG 处的流体速度几乎为零,当盖子突然去掉时速度变为 v,故其运动能为 $A_pv^2\mathrm{d}x$. 当流体元 $abcd$ 排走时,管中 Eb 部分流体的速度也有改变,其相应的运动能增值为 $\mathrm{d}[A_pv^2l]$ 即 $2A_plv\mathrm{d}v$. 而容器内势能的减少值为 $HA_p\mathrm{d}x$,根据容器内势能的减少值等于管道内运动能的增加值的假说有

$$A_pv^2\mathrm{d}x+2A_plv\mathrm{d}v=HA_p\mathrm{d}x$$

或

$$\frac{v\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\frac{H-v^2}{2l}.$$

在整个运动过程中. 在时间 $\frac{\mathrm{d}x}{v}$ 内所产生的速度增加 $\mathrm{d}v$ 是与压力成正比的. 即作用在 ad 上的压力是与加速度 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ 成正比的,亦即与 $\frac{H-v^2}{2l}$ 成正比. 考虑刚去掉管盖那一瞬时的压力,这时,$v\sim\frac{\sqrt{H}}{n}$,或 $v^2\sim\frac{H}{n^2}$ 代入上式右边有 $\frac{n^2-1}{2ln^2}H$. 即此时管壁上的压力 $\sim\frac{n^2-1}{2ln^2}H=\left[\frac{1}{2l}-\frac{1}{2ln^2}\right]H$,如果小孔的横截面积非常小,$n$ 与 1 相比相当大,n^2 与 1 相比更是非常大,则上式右边方括号中的第二项可以忽略不计,同时,已知小孔横截面积为零时,管壁上的压力为静压力 H. 如果上式右边方括号中的第一项 $\frac{H}{2l}$,近似地取为静压力 H,即 $\frac{1}{2l}$ 取为 1,则上式变为

$$\text{管壁上的压力近似地}\sim\frac{n^2-1}{n^2}H,\tag{A}$$

它不再与长度 l 有关. 这就是 D. 伯努利所得到的管壁压力公式,为了证明这一结论的正确性他进行了很多实验,包括在容器上安装垂直的、水平的和各种不同倾斜角的管道,在管道开孔测量它们的沿程压力和速度,结果表明计算与实验结果基本上是相符的. 通过这一工作使伯努利认到(1)压力与速度之间存在依赖关系,即压力增加速度会减小,反之亦反,和(2)流体在运动过程中也存在能量损失. 同时伯努利也成为第一个研究压力与速度依赖关系的人.

很显然,D. 伯努利所得到的表达式(A)与现在的伯努利方程

$$\frac{p}{\rho g}+\frac{v^2}{2g}+y=C(\psi) \tag{B}$$

是不相同的，我们不妨来对表达式(A)作些探讨，如果在(A)式中取压力为表压强 p，比例常数为 ρg，其中 ρ 为密度，g 为重力加速度，这样，(A)式两边的量纲是完全相同的，于是(A)式变为

$$p=\rho g\left[H-\frac{H}{n^2}\right] \quad 或 \quad \frac{p}{\rho g}=H-\frac{H}{n^2}.$$

由于 $n^2=\frac{v_0^2}{v^2}$ 和 $v_0^2=2gH$，将这些结果代入上式后有

$$\frac{p}{\rho g}+\frac{v^2}{2g}=H. \tag{A_1}$$

应当注意：D. 伯努利所得到的表达式(A)，或方程(A_1)仅适用于管道内，而伯努利方程(B)则适用于沿流线的任何一点. 如果我们从自由面往下沿管道中心线取一流线，在此流线上取两点，一点在自由面上，另一点在管道中心线上. 对此二点应用伯努利方程(B)，由于在自由面上表压强为零，速度亦可近似取为零，于是有

$$H=\frac{p}{\rho g}+\frac{v^2}{2g}. \tag{B_1}$$

此式与(A_1)式无论在形式上或涵义上均相同，这表明 D. 伯努利最初所获得的表达式(A)或方程(A_1)是现有伯努利方程(B)的一个特殊情况.

(七) 空化现象

在自然的水体(如海洋、江河、湖泊等)中往往含有未溶于水的微小气泡，通常称之为空化核或气核，其直径大约在 $10^{-5}\sim10^{-3}$cm 之间，当水流经一速度较高，绝对静压等于或低于水的饱和蒸汽压强的局部区域时，由于水的迅速蒸发和气体的少量析出，立即形成一些充满蒸汽或气体的空泡. 如果水流继续流动，压强将重新回升，蒸汽也会出现凝结现象，使空泡破裂并伴以剧烈的响声，这就是所谓的空化现象，它往往发生在液－固的交界面处.

1873 年 O. 雷诺就曾预言，船桨与水之间的相对高速运动会产生影响船桨性能的真空腔，1894 年 S.J. 桑尼克罗夫特与 S.W. 巴纳比首先在鱼雷驱逐舰的螺旋桨背面观察到使螺旋效率急剧下降的空化现象，两年后，C.A. 帕森斯建造了第一座供水流实验用的水洞，1916 年他在实验室的模型螺旋桨上观察到同样的现象，并对它的剥蚀机理做了初步研究，除水以外，其它液体在类似情况下也会出现空化现象.

研究空化机理亦即研究空泡的形成，发展与破裂过程具有十分重要的工程实用价值，因为水上交通工具的船用螺旋桨，舵，水翼；水力机械的水泵，水轮机；水工建筑与结构的高速涵洞，闸门槽；动力系统的液体火箭泵，柴油机和

各种水下兵器中均会遇到空化问题，它不仅限制了运转速度，降低了效率，而且还产生了振动、噪声和材料剥蚀，极大地缩短了设备的使用寿命，但它也不是完全有害的，在化工、医药、核工程中它也能做一些有益的事，如工业清洗，水力钻孔等.

描述空化现象的无量纲相似性参数是空化数 σ，它是由 D. 托玛引进的，并定义为

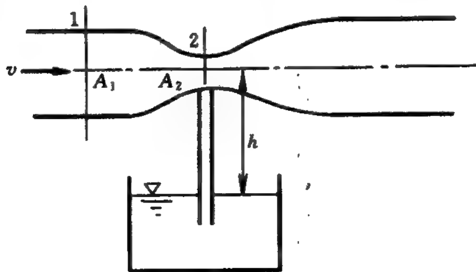
$$\sigma=\frac{p_{\infty}-p_{c}}{\frac{1}{2}\rho v_{\infty}^{2}}$$

其中 p_{∞} 与 v_{∞} 为来流的压强与速度，ρ 为液体密度，p_c 为空泡中的压强，若空泡中仅有液体蒸汽则 $p_c=p_v$，p_v 为液体的饱和蒸汽压强；若空泡中兼有液体蒸汽和其它气体，则 $p_c>p_v$. 一般说来，空化数越小，越易出现空化现象. 通过改变来流的速度或压强即可改变空化数和空化状态.

习　题

4.1　一水平开路风洞从四周吸入空气，经收缩段后进入横截面积为 0.25m^2 的试验段，一压强计与试验段相连，在某一特定工作情况读数为 25mm 水柱真空，求：(a)试验段的风速；(b)质量流量. 空气的密度 ρ 为 1.2kg/m^3.

4.2　在文丘里管的最小横截面处有一与其相通的垂直侧管，侧管的下方有一容器，内盛密度为 ρ_m 的液体，液面距文丘里管中心线的高度为 h，截面 1 与 2 处的横截面积分别为 A_1 与 A_2，假定流体为无粘性和不可压缩的，忽略重力的影响，当空气在文丘里管中作定常运动时，v 为何值时方能将液体吸入管内.

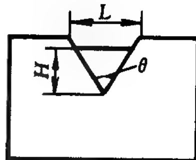


4.2 题图

4.3　试证明三角堰的理论流量为

$$Q_V=\frac{8}{15}\sqrt{2g}\tan\frac{\theta}{2}\ H^{5/2}.$$

实验表明实际值仅约为此值的 42%.



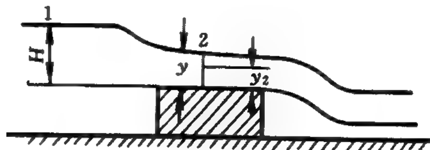
4.3 题图

4.4　一宽顶堰如 4.4 题图所示. 如果忽略来流速度和假定 2 处的压强按静压分布,试证明当堰宽为 L 时理论流量为

$$Q_V = Ly\sqrt{2g(H-y)}\ .$$

并证明 $y=\dfrac{2}{3}H$ 时,Q_V 有最大值

$$Q_{V\max} = \frac{2}{3}\left[\frac{2}{3}g\right]^{1/2} LH^{3/2}.$$

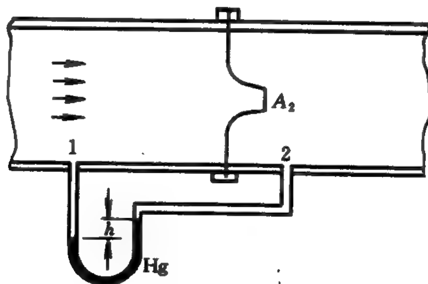


4.4 题图

4.5　另有一种测量流量的仪器称为流量嘴,使用时将它插入管道中如 4.5 题图所示,如果 A_2 是流量嘴的出口面积,试证对不可压缩流体的流量为

$$Q_V = C_d \frac{A_2}{\sqrt{1-\left(\dfrac{A_2}{A_1}\right)^2}}\sqrt{2\,\frac{p_1-p_2}{\rho}},$$

其中 C_d 为流量系数,它考虑摩擦效应并由实验确定.

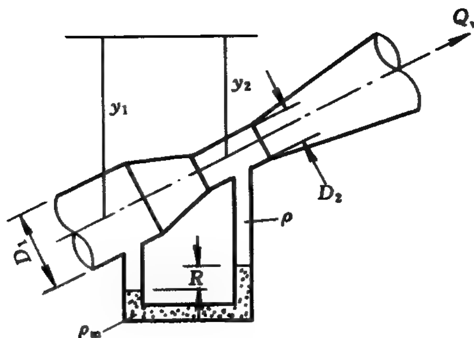


4.5 题图

4.6　4.6 题图(见下页)为一文丘里管与一压强计,试导出一表达式表明体积流量 Q_V 与压强计读数之间的关系为

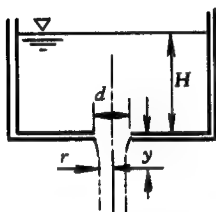
$$Q_V = A_2\left[\frac{2gR\left(\dfrac{\rho_m}{\rho}-1\right)}{1-(D_2/D_1)^4}\right]^{1/2}.$$

4.7　一容器底部有一孔形成射流,如果忽略损失与表面张力效应,试导出射流半径 r 随 y/H 的变化为

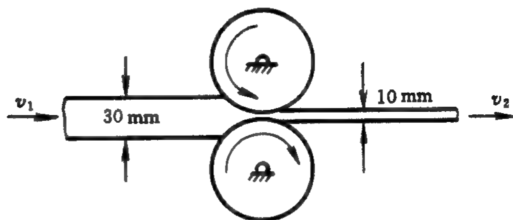


4.6 题图

$$\frac{r}{d}=\frac{1}{2(1+y/H)^{1/4}}.$$



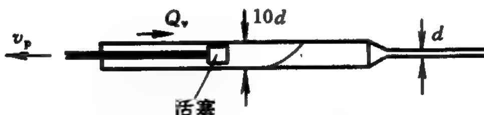
4.7 题图



4.8 题图

4.8　一轧钢厂滚轧热钢，经过滚子后，钢的密度增加 10%，同时，钢的宽度增加 9%，如果钢的被轧前速度为 0.2m/s，试求被轧后速度．

4.9　一护士用注射器从一病人身上抽血，注射器的玻璃管直径与针头直径之比为10∶1．活塞以 $v_p$mm/s 的速度抽血，并允许空气以体积流量 Q_V mm^3/s 通过活塞与玻璃管之间的间隙运动，求针头中血液的平均流速．

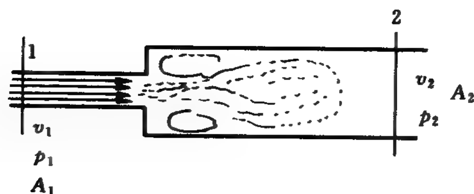


4.9 题图

4.10　管路系统中有一突然扩大段，小管与大管的横截面积分别为 A_1 与 A_2，它们的速度与压强分别为 v_1, p_1 与 v_2, p_2，如果流体是无粘性和不可压缩的，试证突然扩大段的损失为

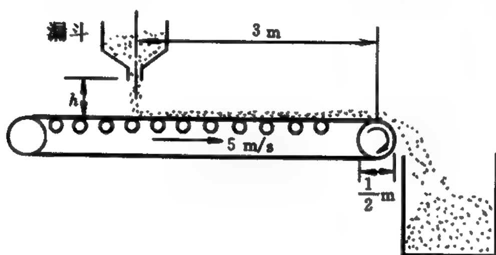
$$h_1=\frac{1}{2}\rho v_1^2\left[1-\frac{A_1}{A_2}\right]^2.$$

4.11　一传送带的运动速度为 $v=5$m/s，砂石以 $2m^3/min$ 的流量流在传送带上，砂石的



4.10 题图

重量为 20kN/m^3,它离开漏斗的速度为 1m/s,并有一平均自由高度 $h=2$m,忽略各滚子上的摩擦力试计算:(a)运转传送带所需的力矩 T,(b)砂石降落时作用于传送带上的总垂直力.



4.11 题图

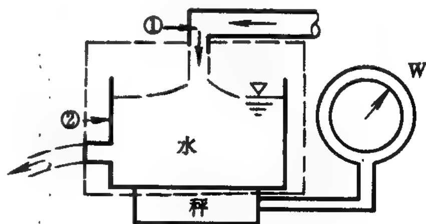
4.12 一水射流从一圆管平行射出并冲击一固定垂直平板上,射流的理论速度分布为

$$v=v_{\max}\left[1-\frac{r}{R}\right]^{1/7}.$$

如果计算平板的推力时,假定射流的速度分布是均匀的,试问这会带来多大的误差百分数.

4.13 一直径为 300mm 的台扇,空气以 60m^3/s 的流量流过它,如果需要将台扇保持在桌上不动,并假定底座与桌面之间的摩擦系数为 0.1,试计算台扇所需的最小重量,假定扇前与扇后的气流分别较扇的圆形面积大与小 10%,$\rho=1.2$kg/m^3.

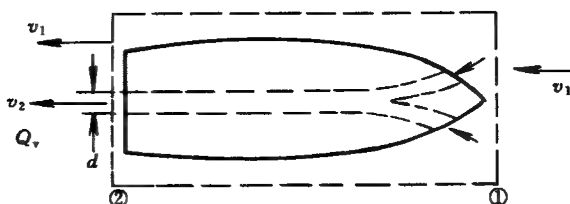
4.14 一空重为 W_T 的容器,内盛体积为 Q_V 的水,进出口管完全相同,其直径为 D,体积流量均为 Q_p,将此容器放在台秤上,如图所示,试求台秤上所指示的重量为何?



4.14 题图

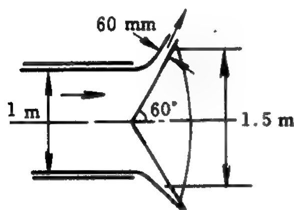
4.15 与飞行器一样,船舶也可用喷射技术使其前进,水由船头进入船内,经增加能量后从船尾喷出,假定已知船速为每小时 K 公里时所需的力为 F 公斤,排放管的直径为 d,如果忽略推进系统的损失,试求:(a)体积流量 Q_V,(b)效率,(c)所需功率.

4.16 一直径为 1m 的柱形通道喷射出一股水流,它由一沿轴向运动的锥形阀门控制,其半顶锥角为 60°. 如图所示,阀门上游柱形通道处的压强为 105kPa,大气压强为 1Pa,忽略

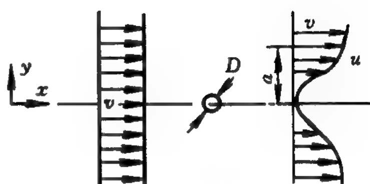


4.15 题图

摩擦力与重力作用，试求作用于锥形阀上的轴向力.



4.16 题图



4.17 题图

4.17　在一低速水槽中进行实验测量以确定圆柱的阻力，在圆柱前后各一截面上测量速度分布，它们的压强均相等且均匀，如图所示，实验的条件与结果如下：

$$v=50\text{m/s},\qquad \rho=1.2\text{kg/m}^3$$

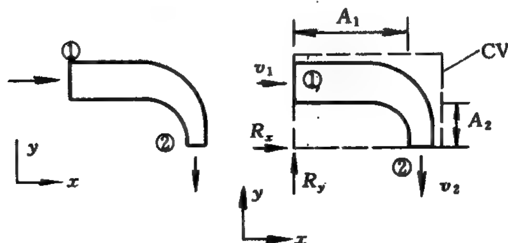
$$D=30\text{mm},\qquad a=2.2D,$$

$$u=v\sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right),\quad 0\leqslant y\leqslant a,$$

$$u=v,\qquad y>a,$$

试求每单位宽度圆柱的阻力.

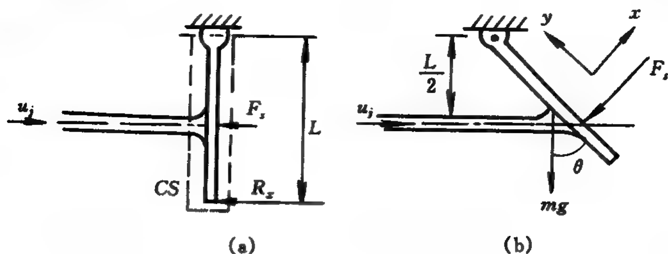
4.18　水流平稳地流经一 90°收缩弯管，如图所示在入口处绝对压强为 221kPa. 横截面积为 0.01m²，在出口处截面积为 0.0025m²，速度为 16m/s，压强为大气压，假定弯管的重量不计. 试求保持此弯管不动所需的力.



4.18 题图

4.19　一等厚度方形平板，它的上边可沿水平轴转动，它的边长 $L=0.4\text{m}$，重量 $W=$

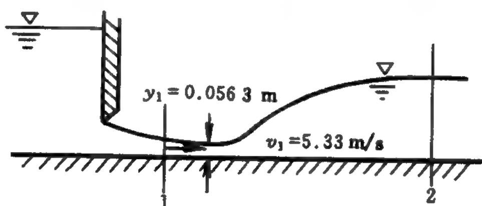
100N，一直径 $d=0.02$m 的水射流水平地冲击在此平板上，冲击点位于上缘下方 0.2m 处，这样，当平板垂直时正好冲击在平板的中心点，射流速度 $v_j=15$m/s，试求：(a)为了保持平板垂



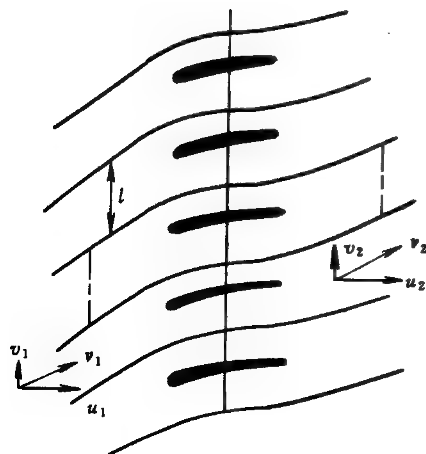
4.19 题图

直，下缘处应加的力 R_x 为何？(b)如果容许平板自由摆动，在射流作用下平板会偏离垂直线的角 θ 为何？在两种情况均假定射流冲击平板后仍沿平板流动.

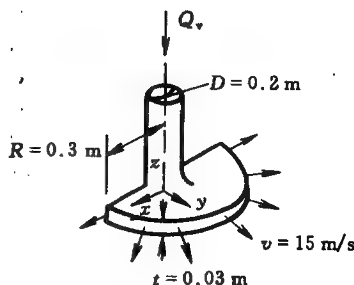
4.20　一闸门位于一水平底面的河渠上，在闸门的下游立即出现一水跃，如果已知 $y_1=0.0563$m，$v_1=5.33$m/s，试求：(a)水跃下游深度，(b)跨水跃的水头损失.



4.20 题图



4.21 题图



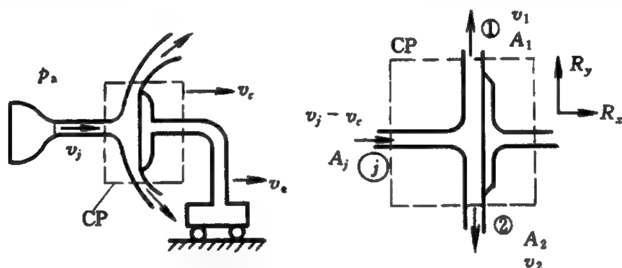
4.22 题图

4.21 一列无穷多个形状相同相互平行的翼型通常称为翼栅，它们之间的间距 l 也是相同的，翼栅代表一组导流片的平面图形，它也近似地代表一叶轮圆截面的平面展开图形，一均匀来流 v_1 以一定的冲角绕过翼栅，假定流体是无粘性和不可压缩的，流动是定常的，忽略重力作用，上游与下游的速度和压强分别用脚标 1 与 2 去表示，试求作用于每一个翼型上的力.

4.22 一喷管从一 180°弧形缝隙喷出一薄层水，水速为 18m/s，射流厚度为 0.03m，出口的径向距离为 0.3m(从供应管的中心轴线)，求：(a)射流水的体积流量，(b)需要保持此喷管不动所需力的 y 分量.

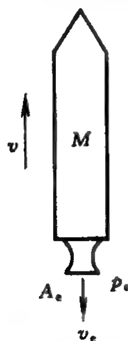
4.23 在绕溢洪堰的例 4.24 中，如果每米宽度的 $Q_V = 15\text{m}^3/\text{s}$，$H_1 = 5\text{m}$，试求 H_2 与 F_x.

4.24 一速度为 v_j 的水射流垂直冲击在一以速度 v_c 向右运动的平板上，如图所示，如果射流的密度为 ρ_j，横截面积为 A_j，忽略射流与平板的重量，假定射流相对于运动平板的流动是定常的，且射流到达平板后均分为上下两股半射流，试求使平板作常速运动时所需的力.

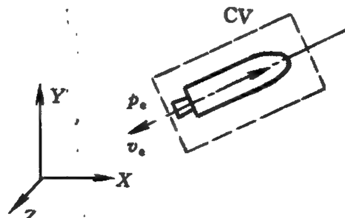


4.24 题图

4.25 一总质量为 800kg 的火箭正在某一高度作垂直运动，该处的压强为 0.6 帕，重力加速度为 9.6m/s^2，如果喷管排出 10kg/s 的燃烧物质，它的出口速度和压强分别为 1500m/s 与 0.85Pa，试求火箭的推力和加速度，假定喷管出口截面积为 0.25m^2，空气阻力为 1.5kN.



4.25 题图

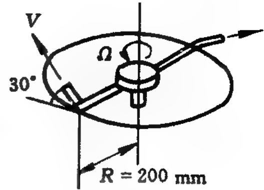


4.26 题图

4.26 在外层空间沿一直线从静止状态发射一枚火箭，该处的大气压强为零，空气阻力与重力影响均可忽略不计，每单位时间火箭燃烧 $\dot{m}_f$ 千克的燃料，同时火箭的初始总重量为

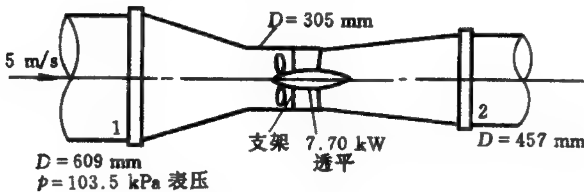
M_0. 相对于火箭射流的出口速度 v_e 为一常数，出口压强为密度分别为 p_e 与 ρ_e，火箭相对于固定坐标系的速度为 v_R，试求此速度.

4.27　一草坪洒水器在进口表压为 140kPa 条件下运转，总的水流量为 4 公升/min. 每一射流以相对于转臂为 17m/s 的速度排水，洒水器射流喷嘴与水平面成 30°夹角，如图所示，洒水器绕垂直轴旋转，在轴承内有 0.18Nm 的转矩阻碍它旋转，试计算：(a)使洒水器保持定常转动所需的转矩，(b)定常转动的角速度，(c)近似的喷洒面积.



4.27 题图

4.28　一水涡轮机从流水中吸取 7.7kW 的功率，水洞尺寸、外界条件和流体速度，如图所示. 试求水流速度 v_e 和大气作用于水洞上的水平分力，如果假定流体是无粘性和不可压缩的，运动是定常的，并忽略重力影响.



4.28 题图

4.29　一射流沿一圆管轴线流动，射流的横截面与速度分为 A 与 $2v$，圆管的横截面积为 $2A$，射流所产生的二次流动的速度为 v，混合后流体的速度成为均匀的，忽略壁摩擦力，试证明能量的衰减率为 $0.375\rho Av^3$.

第五章 流体的涡旋运动

流体的涡旋运动是工程和自然界中普遍存在的一种流动现象. 由于它的特殊运动性质,人类对其认识在早期十分模糊,并且带上了某种神秘色彩. 只是随着科学技术和流体力学学科的发展,人们对涡旋运动才有了更多更深入的正确认识,并利用涡旋运动为其服务. 本章简单介绍了流体涡旋运动的性质和涡量输运方程(5.1),在某些条件下无粘性流体中涡的保持性质(5.2),涡旋对流场所产生的诱导速度公式(5.3)以及产生涡旋运动的某些因素(5.4),以便对涡旋运动有初步的认识. 这种运动的另外一些性质将在以后一些章节中陆续加以介绍和讨论.

5.1 涡旋运动的基本概念和涡量输运方程

流体的涡旋运动是一种基本的流动现象,它普遍存在于自然界和各种工程中,对这种运动的探索可追朔至人类文明史的早期,但至今尚未完全认识,仍在继续探索之中.

早在1671年,我国的揭瑄首先对涡旋进行了专门实验,得到完全正确的定性结论. 在欧洲,对涡旋的观察也早就开始,真正的研究是从19世纪开始的. 1815年A.L.柯西引进了流体质点平均旋转的概念. 稍后,P.E.阿佩尔实际观察到了这种瞬时旋转现象. 1843年H.L.F.亥姆霍兹引进了涡线、涡面和涡管,对涡进行了全面的研究,他是无粘性涡旋理论的创始者. 现在,对涡旋运动的研究正向更深更广的领域发展.

流体的涡旋现象往往与凶暴、危险和神秘等概念联系在一起,实际上它还具有巨大的潜在能量. 今日科学的发展使得很少有人依然相信超自然力或者神的存在,然而危险及未知仍是许多涡流现象的特点. 台风和龙卷风依然破坏亚洲、澳洲和美洲的海岸,每年吞噬着成千上万人的生命. 1952年3月21日,龙卷风袭击美国阿肯色州的得克斯,造成208人死亡,2 500人受伤,2 500幢房屋遭到破坏. 1990年8月31日,9015号台风在我国浙江嫩江县登陆,最大风力12级,

有2 000多万人受灾,200万公顷农田被淹. 造成浙江省40多年来最严重台风灾害. 此外,深海的涡流仍鲜为人知,百慕大三角区的旋涡更使人神秘莫测;太阳系起源和银河结构是尚未解决的涡结构;湍流中不同尺度结构的涡还困惑着人们. 除了上面谈及的自然界有破坏作用的涡旋,涡旋的产生往往还伴随机械能耗损,使飞机、舰船、水轮机等增加流体阻力,降低机械效率. 但是在另一方面,涡旋在许多方面却有利于人类,人们利用涡旋来为自己服务. 现代生物力学证实了主动脉窦内血液形成的涡旋使主动脉瓣在射血结束时关闭,保证了人体血液循环的正常进行. 航空学家利用三角翼所形成的涡旋增加机翼的升力. 在水利工程如水坝泄水口中,为保护坝基不被急泻而下的水流冲坏,采用消能设备,人为地制造涡旋以消耗水流动能. 还可以利用旋涡完成加快掺混媒质任务,以加快化学反应速度,增强轻工、冶金过程物料的混合速度,大大提高燃烧效率和热交换效率. 在涡旋流动中利害二者并存,因此需要今天的人们努力研究、不断探索,掌握涡旋的规律,为人类社会造福.

(一) 涡旋运动的一些基本概念和运动学特性

首先看几个涡旋流动现象(图5.1),以便对涡旋有个初步的感性认识.

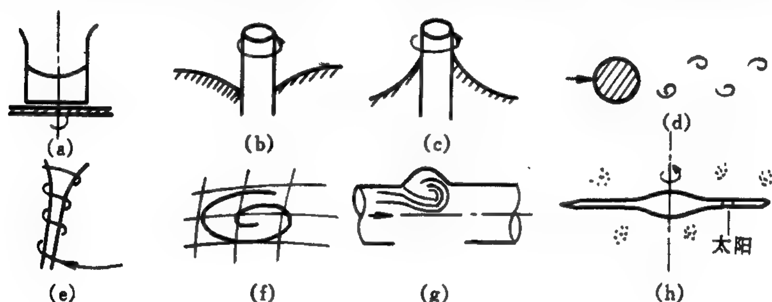


图5.1 自然界中各种涡旋运动现象

(a)图是圆筒中水随圆筒一起绕轴转动形成的涡流,此时水的运动如同刚体一样转动,流体质点速度和离轴距离成正比. (b)图是水中插一个旋转的直圆柱而形成的涡流. 注意,自由面呈现抛物曲面形状. (c)图是面浆中插一个旋转直圆柱形成的涡流,有趣的是面浆会顺着圆柱向上"爬". (d)图是流体以一定流速绕过圆柱时,圆柱后面将出现两列交替排列的涡,称为卡门涡街. (e)图是柱状涡,旋风就是这一类涡流,通常直径10m,而高达1 000m. (f)图是碟状涡,海洋和大气层中很多为此类涡流. 和柱状涡相反,其直径达1 000km而高度约10km. (g)图是人体主动脉窦内血液在主动脉瓣开启时所形成的涡流,正是这个涡的作用使主动脉瓣在射血结束时关闭. 涡的这个作用早已由达·芬奇指出. (h)图是银河系的涡状结构,天文测量证实了这样的结构. 此类结构的星系并不

是唯一的，宇宙中成千成万地存在着.

还可以举许多涡旋运动实例. 小至原子结构，大至宇宙星云；从无机世界到生物体的生理活动，大千世界中存在形形色色的涡旋运动现象.

为了能对涡旋运动作定量描述，有必要对流体涡旋运动下明确严格的定义，即根据什么称流体运动是有旋的.

日常生活中常把绕某一中心旋转的流动(不一定圆周运动)称作涡旋，即看流体质点运动迹线来判断运动是否有旋. 从流体力学观点看，这样的判断是不对的. 图 5.2(a)是均匀流，图 5.2(b)是简单剪切流. 这两种流动，流体质点的轨迹都是直线. 但如把可以绕中心各自转动双臂的微小十字架放入流场，则在前者，十字架始终保持原状，而在后者，十字架双臂发生相对转动. 因而前者流动是无旋的，后者是有旋的. 再看下两个图，图 5.2(c)是“自由涡”，$\boldsymbol{v}=\left(-\frac{cy}{x^2+y^2},\ \frac{cx}{x^2+y^2}\right)$，而图 5.2(d)是“受迫涡”(有关这两种涡的详细分析后面将进行)，$\boldsymbol{v}=(-cy,\ cx)$. 这两种流动，流体质点的轨迹都是圆周. 但如把小十字架放入，在前者，十字架保持原状，而在后者，十字架将转动. 因而“自由涡”是无旋的，“受迫涡”是有旋的. 显然，以流体质点的运动轨迹来判断流动是否是涡旋运动是错误的.

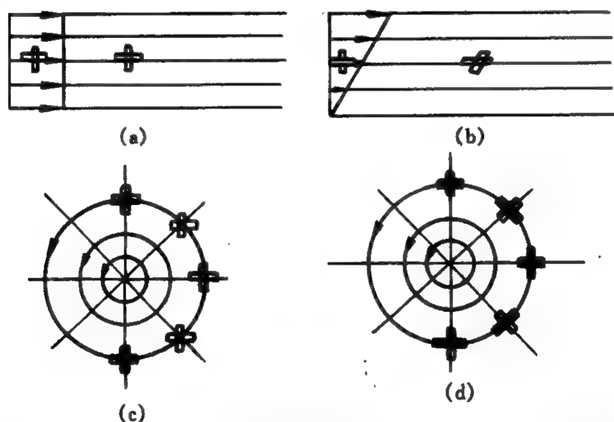


图 5.2　(a) 均匀流　(b) 简单剪切流　(c) 自由涡　(d) 受迫涡

下面我们对流体的涡旋运动下明确严格的定义.

定义流体速度的旋度 rot $\boldsymbol{v}$ 为流场的涡量，记作 $\boldsymbol{\omega}$，

$$\boldsymbol{\omega}=\mathrm{rot}\ \boldsymbol{v}\ . \tag{5.1.1}$$

在流场某一区域中如 $\boldsymbol{\omega}\neq 0$，称在这区域中流动是有旋的，也称为涡旋运动，否则就称为无旋的.

涡量 $\boldsymbol{\omega}$ 是空间坐标 x、y、z 和时间坐标 t 的连续函数，和速度 $\boldsymbol{v}$ 一样，涡量

$\boldsymbol{\omega}$ 构成了矢量场,称为涡量场.

1. 涡线、涡面和涡管

涡线 对于同一时刻的质点线,如它上面任一点切线方向与该点流体涡量方向一致,这条曲线就称为涡线. 涡线方程表示为

$$\boldsymbol{\omega}\times \mathrm{d}\boldsymbol{l}=0, \tag{5.1.2}$$

式中 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 是涡线上微矢量元. 在直角坐标中,涡线方程是

$$\frac{\mathrm{d}x}{\omega_x}=\frac{\mathrm{d}y}{\omega_y}=\frac{\mathrm{d}z}{\omega_z}. \tag{5.1.3}$$

式中 ω_x、ω_y、ω_z 是涡量 $\boldsymbol{\omega}$ 在直角坐标系中的分量.

在涡线方程中,时间 t 以参数形式出现,在同一时刻,(5.1.3)式构成了涡线族. 要注意的是,在某一时刻构成涡线的质点线,在其它时刻不一定是涡线.

涡面 在涡量场中任取一条非涡线的曲线,过该曲线的每一点作同一时刻的涡线,构成一个曲面,称为涡面.

涡管 如果在涡量场中取非涡线的封闭曲线,则在同一时刻过该曲线的每一点作涡线,就形成了一个管状的曲面,称为涡管.

很显然,根据定义,涡面和涡管上任一点的法线方向 $\boldsymbol{n}$ 和该点的涡量 $\boldsymbol{\omega}$ 是垂直的

$$\boldsymbol{\omega}\perp\boldsymbol{n}$$

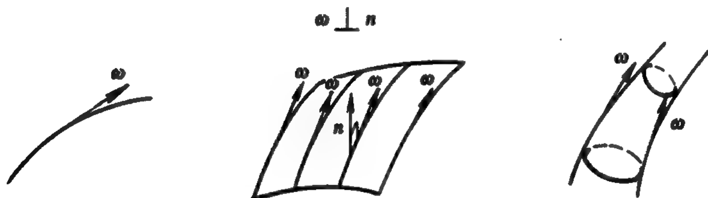


图 5.3 涡线、涡面和涡管

2. 涡通量、速度环量和涡管强度

涡通量 在流场中某一曲面 A,其面积分

$$J=\iint_A \boldsymbol{\omega}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} \tag{5.1.4}$$

称为过曲面 A 的涡通量.

涡管强度 对于流场中某时刻的涡管,取涡管的一个横截面 A,称过曲面 A 的涡通量为该瞬时的涡管强度.

下面将证明涡管强度与横截面 A 的取法是无关的.

速度环量 对流场中某时刻的封闭曲线 L,作线积分

$$\Gamma=\oint_L \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}, \tag{5.1.5}$$

Γ 称为$\boldsymbol{v}$ 沿该封闭曲线的速度环量，由开尔文在 1869 年引进．速度环量 Γ 与流场中速度方向有关，还与积分时绕行 L 的方向有关，通常按逆时针绕行的方向为正方向．

设 L 是一条封闭曲线，以该曲线为周界的任意曲面记为 A，由积分中熟知的斯托克斯定理知

$$\Gamma = \oint_L \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint_A \nabla \times \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \iint_A \boldsymbol{\omega} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = J. \tag{5.1.6}$$

这说明了沿封闭曲线 L 的速度环量等于穿过以该曲线为周界的任意曲面的涡通量．

(5.1.6)式的微分形式是

$$\omega_n = \frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}A}. \tag{5.1.7}$$

(5.1.6)、(5.1.7)两个式子建立起了涡通量和速度环量之间的联系，它们都刻划了流体在运动过程中的涡旋特性．但是由于速度环量是线积分，而且被积函数是速度本身；而涡通量是面积分，被积函数是速度的偏导数，无论从数学计算的角度、或者从测量的角度，使用速度环量往往要方便些．

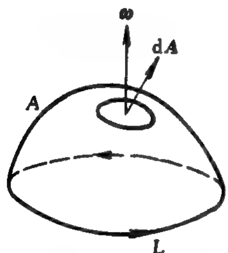


图 5.4　涡量及速度环量

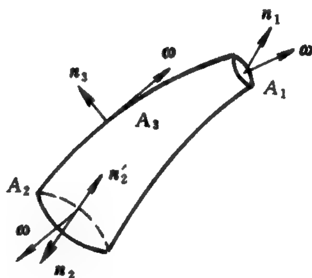


图 5.5　涡管段

3. 涡管强度守恒定理

在同一时刻同一涡管的各个截面上，涡通量都是相同的，即涡管强度是守恒的，与截面的选取无关．

考虑图 5.5 的涡管段，两个端面记为 A_1 和 A_2，侧面记为 A_3，这三个面的外法向记为 $\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2$ 和 $\boldsymbol{n}_3$．

由于
$$\operatorname{div} \boldsymbol{\omega} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 0,$$
即涡量场是个无源场．因此对于过这个涡管段整个表面的涡通量 J 有

$$J = \oiint_{A_1+A_2+A_3} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \iiint_\tau \operatorname{div} \boldsymbol{\omega} \mathrm{d}\tau = 0.$$

另一方面又注意到,在外侧面 A_3 上,$\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{n}_3=0$,所以

$$J=\iint_{A_1}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{n}_1\mathrm{d}A+\iint_{A_2}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{n}_2\mathrm{d}A$$

$$=\iint_{A_1}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{n}_1\mathrm{d}A-\iint_{A_2}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{n}'_2\mathrm{d}A,$$

于是有

$$\iint_{A_1}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{n}_1\mathrm{d}A=\iint_{A_2}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{n}'_2\mathrm{d}A.$$

由于 A_1 与 A_2 是沿涡管任意选取的,因此在同一时刻,同一涡管各截面涡通量相同,与截面的选取无关.

根据涡管强度守恒定理,可以知道:

(1) 对于同一涡管,截面积越小的地方,涡量越大,流体旋转角速度越大.

(2) 涡管截面不可能收缩到零. 因为若收缩到零,则涡量将增至无穷大,这是不可能的. 因此,涡管不能在流体之中产生或终止,只能在流体中形成环形涡环,或始于、终于边界,或伸展至无穷远.

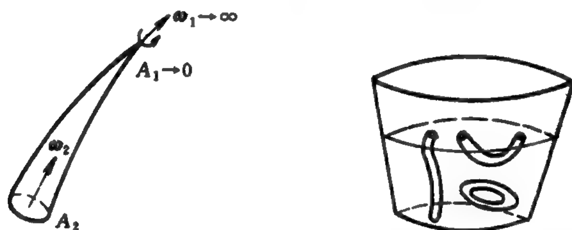


图 5.6 涡管不能在流体内部产生或终止

(二) 粘性流体涡量输运方程

现在研究涡量的随体变化规律.

对于粘性流体运动,当粘度 μ 是常数时,有纳维-斯托克斯方程

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}=\boldsymbol{F}_b-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\Delta\boldsymbol{v}+\frac{1}{3}\nu\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v}). \tag{5.1.8}$$

也可写成兰姆的形式

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+\nabla\frac{v^2}{2}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{F}_b-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\Delta\boldsymbol{v}+\frac{1}{3}\nu\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v}). \tag{5.1.9}$$

对此式的两边取旋度,注意$\nabla\cdot\boldsymbol{\omega}=0$,可以得到

$$\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega}-(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\omega}(\nabla\cdot\boldsymbol{v})$$

$$=\nabla\times\boldsymbol{F}_b-\nabla\times\left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right)+$$

$$\nabla\times(\nu\Delta\boldsymbol{v})+\frac{1}{3}\nabla\times[\nu\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v})] \tag{5.1.10}$$

特别当 ν 为常数时成为

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{D}t}-(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\omega}(\nabla\cdot\boldsymbol{v})=\nabla\times\boldsymbol{F}_{\mathrm{b}}-\nabla\times\left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right)+\nabla\times(\nu\Delta\boldsymbol{v})+\frac{1}{3}\nu\nabla\times[\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v})]. \tag{5.1.11}$$

这就是 ν 为常数时粘性可压缩流体运动的涡量输运方程. 整理后,(5.1.11)式成为

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{D}t}=(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}-\boldsymbol{\omega}(\nabla\cdot\boldsymbol{v})+\nabla\times\boldsymbol{F}_{\mathrm{b}}+\frac{1}{\rho^2}\nabla\rho\times\nabla p+\nu\nabla^2\boldsymbol{\omega}. \tag{5.1.12}$$

从(5.1.12)式可以看到,影响涡量随体变化的因素有:(1)外力;(2)流体非正压性;(3)粘性,以及右端第一、第二项的作用. 对于右端第一、第二项,下面稍加以分析.

第二项 $-\boldsymbol{\omega}(\nabla\cdot\boldsymbol{v})$ 是与流体散度有关的项. 流体运动过程中,流体质点的体积若收缩,$\nabla\cdot\boldsymbol{v}<0$,则涡量将增加,反之涡量将减小. 我们已在理论力学中了解到,不受外力矩作用的物体其动量矩守恒,当转动惯量减少时,必然有角速度增加,这样也就不难理解流体质点体积收缩时,涡量将增加.

第一项 $(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$ 表示了速度沿涡线的变化. 由于速度是矢量,这种变化可以分解成两部分:一部分平行于涡线,另一部分垂直于涡线. 平行于涡线的速度变化,使得涡线上相邻两点产生沿涡线的相对位移,或分开,或靠拢,涡线就将“伸长”或“缩短”,因此是一种拉伸压缩效应. 垂直于涡线的速度变化,使得涡线上相邻两点产生垂直于涡线的相对位移,涡线就将“扭曲”起来. 这样原来直线型涡线将变为曲线型涡线,因此是一种扭曲效应.

(三) 粘性流体运动中速度环量的变化

前面关于速度环量 Γ 的(5.1.6)式和(5.1.7)式,也刻划了流体在运动过程中的涡旋特性,而且有时使用速度环量更方便些. 同涡量一样,下面分析粘性流体速度环量的随体变化.

常值粘度的纳维－斯托克斯方程是(5.1.8)式

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}=\boldsymbol{F}_{\mathrm{b}}-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\Delta\boldsymbol{v}+\frac{1}{3}\nu\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v}).$$

对封闭流体质点线进行线积分有

$$\oint_l\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\oint_l\boldsymbol{F}_{\mathrm{b}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}-\oint_l\frac{1}{\rho}\nabla p\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}+\oint_l\nu\Delta\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}+\oint_l\frac{1}{3}\nu\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}. \tag{5.1.13}$$

从图 5.7 可以看到，t 时刻的流体线微元 $\delta \boldsymbol{l}$，在 $t+\Delta t$ 时刻成为 $\delta \boldsymbol{l}+\frac{\mathrm{d}\delta \boldsymbol{l}}{\mathrm{d}t}\Delta t$，两者成立

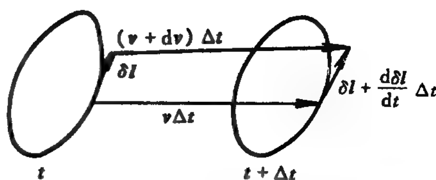


图 5.7 封闭流体线的运动

$$\delta \boldsymbol{l}+(\boldsymbol{v}+\mathrm{d}\boldsymbol{v})\Delta t-\boldsymbol{v}\Delta t=\delta \boldsymbol{l}+\frac{\mathrm{d}\delta \boldsymbol{l}}{\mathrm{d}t}\Delta t,$$

即

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\delta \boldsymbol{l}}{\mathrm{d}t}.$$

于是

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l})=\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}+\boldsymbol{v}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}+\mathrm{d}\left(\frac{\boldsymbol{v}^2}{2}\right),$$

因此

$$\frac{\mathrm{D}\Gamma}{\mathrm{D}t}=\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\oint_l \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\oint_l\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l})=\oint_l\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}+\oint_l\mathrm{d}\left(\frac{\boldsymbol{v}^2}{2}\right)=\oint_l\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}.\tag{5.1.14}$$

这说明了封闭流体线的速度环量对于时间的变化率等于此封闭流体线的加速度环量.

将(5.1.14)式代入(5.1.13)式左端，成为

$$\frac{\mathrm{D}\Gamma}{\mathrm{D}t}=\oint_l \boldsymbol{F}_\mathrm{b}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}-\oint_l\frac{1}{\rho}\nabla p\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}+\oint_l\nu\Delta\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}+\oint_l\frac{1}{3}\nu\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}.\tag{5.1.15}$$

如果体力是有势的，$\boldsymbol{F}_\mathrm{b}=-\nabla\Pi$，则右端第一项将消失；如果流体是正压的，$\frac{1}{\rho}\nabla p=\nabla P$，则右端第二项将消失；如果流体是无粘的，则右端第三、四项将消失．因此，体力、流体非正压性和粘性是使速度环量随体运动发生变化的三个因素，这也正是涡量随体运动的发生变化的三个因素.

5.2 无粘性流体的涡量输运方程及涡旋运动性质

一种重要的涡输运现象是无粘性流体的涡输运．当流体无粘性时，$\nu=0$，因此(5.1.12)式简化为

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{D}t}-(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\omega}(\nabla\cdot\boldsymbol{v})=\nabla\times\boldsymbol{F}_\mathrm{b}+\frac{1}{\rho^2}\nabla\rho\times\nabla p.\tag{5.2.1}$$

这是无粘性流体中涡量 $\boldsymbol{\omega}$ 所必须满足的方程.

如果进一步假定体力是有势的,存在体力势 Π,使得

$$\boldsymbol{F}_b = -\nabla \Pi, \tag{5.2.2}$$

并且流体是正压的,则(5.2.1)式简化为

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} - (\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega}(\nabla\cdot\boldsymbol{v}) = 0. \tag{5.2.3}$$

通常称这个方程为亥姆霍兹方程.

(一) 开尔文定理

无粘性流体满足欧拉方程

$$\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{F}_b - \frac{1}{\rho}\nabla p.$$

如果流体是正压的

$$\frac{1}{\rho}\nabla p = \nabla P,$$

体力是有势的

$$\boldsymbol{F}_b = -\nabla \Pi,$$

欧拉方程就成为

$$\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = -\nabla \Pi - \nabla P.$$

把它代入(5.1.14)式,就得到

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_l \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}\cdot d\boldsymbol{l} = -\oint_l (\nabla\Pi + \nabla P)\cdot d\boldsymbol{l}$$

$$= -\oint_l (d\Pi + dP) = 0,$$

由此得到了开尔文定理:

在体力有势、流体是正压的条件下,无粘性流体沿任一条封闭流体线的速度环量不随时间而变化,

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt}\oint_l \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{l} = 0. \tag{5.2.4}$$

这条定理说明了正压的无粘流体在体力有势时,沿着任何封闭流体线的速度环量在流动过程中保持不变.

(二) 拉格朗日涡保持性定理

考虑体力有势、正压的无粘性流体,假定在某一时刻 t_0,在所研究时那部分流体之中,处处有 $\boldsymbol{\omega}=0$,即流动是无旋的. 在这部分流体中,任取一封闭曲线 L,A 是以 L 为边界的流体面. 则由斯托克斯公式知沿 L 的速度环量是

$$\Gamma = \oint_L \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{l} = \iint_A \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{n}\,dA = 0.$$

这说明在所讨论的那部分流体中，沿任意封闭流体线的速度环量在 t_0 时刻为零.

由开尔文定理可知，在以前任何时刻 t_1 和以后任何时刻 t_2，该部分流体中任一封闭流体线的速度环量最终为零.

再一次应用斯托克斯定理，对完全位于所讨论那部分流体中的任何流体曲面 A，成立

$$\iint_A \boldsymbol{\omega} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \oint_L \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \Gamma = 0.$$

由于曲面 A 选取的任意性，要使上式成立，则必须处处成立 $\boldsymbol{\omega}=0$. 由此得到拉格朗日定理：

在体力有势、流体是正压的条件下，无粘性流体若在某一时刻的某一部分内无旋涡，则在这以前及以后时间，该部分流体内也无旋涡.

拉格朗日定理反映了在一定条件下，流场中的旋涡既不会产生也不会消失，是判断流场是否有旋的重要定理.

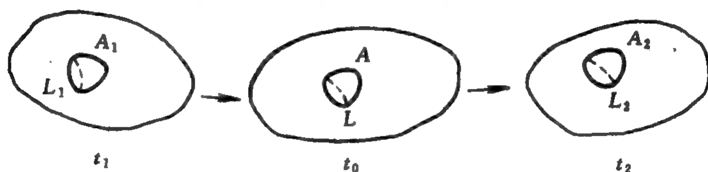


图 5.8 涡保持

例 5.1 对于体力有势、正压的无粘性流体，判断下列流动的流场是否有旋：

(1) 无穷远均匀来流绕流物体的流场；

(2) 物体在静止流体中运动所造成的流场；

(3) 平静水面受外来干扰(如高处下落的水柱；水面上受到瞬时压力冲量作用；风吹过水面等)而引起的波动.

解 由于均匀来流是无旋的，静止流体流场也是无旋的，所以根据开尔文定理可判断所列的三种流场均为无旋的.

(三) 亥姆霍兹涡面及涡管保持性定理

考虑体力有势、正压的无粘性流体，在某一时刻 t_0 流场中存在由流体质点组成的涡面 A_0，可以证明在这以前或以后任一时刻，这些流体质点亦组成涡面.

为此，在 t_0 时刻涡面 A_0^* 上、任取一以封闭流体线 L_0 为周界的流体曲面 A_0，由涡面定义以及斯托克斯公式，可得

$$\Gamma = \oint_{L_0} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint_{A_0} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = 0.$$

在以前及以后任一时刻,流体质点面是 A_1^* 和 A_2^*,组成 L_0 的质点则组成 L_1 和 L_2,组成 A_0 面的流体质点组成 A_1 和 A_2,它们落在 A_1^* 和 A_2^* 上,并以 L_1 和 L_2 为周界.

根据开尔文定理,

$$\oint_{L_1} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_{L_2} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_{L_0} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0,$$

由斯托克斯公式,

$$\iint_{A_1} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \iint_{A_2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \iint_{A_0} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = 0.$$

由于所取涡面及周线的任意性,因此在 A_1^*,A_2^* 面上任一点有 $\boldsymbol{\omega} \perp \boldsymbol{n}$,这说明 A_1^*,A_2^* 均是涡面.

涡管是涡面的特殊情况,上述结论依然成立. 这样就有亥姆霍兹涡面、涡管保持定理:

在体力有势、流体是正压的条件下,无粘流体在某一时刻组成涡面、涡管的流体质点,在这以前或以后时间仍组成涡面和涡管.

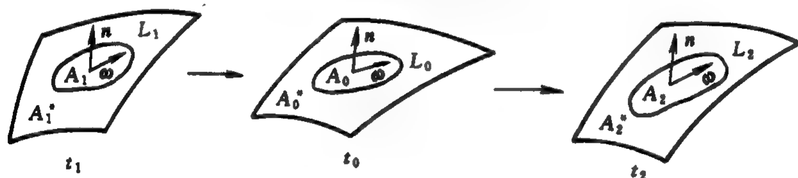


图 5.9 涡面随时间运动

涡线可以看为两个涡面的交线,那末由这条定理,涡线也保持不变.

这样我们看到,在流体正压、无粘性和体力有势这三个条件下,涡线、涡面和涡管具有保持性. 它们通常统称为亥姆霍兹第一定理.

(四) 亥姆霍兹涡管强度保持性定理

在本章的开始部分说明了在同一时刻,涡管强度是守恒的. 如果流体无粘性、正压、且体力有势,那末涡管强度在运动过程中仍保持不变. 这是因为涡管强度等于截面 A 与该涡管表面交线 L 的速度环量 Γ,

$$J = \iint_A \boldsymbol{\omega} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \oint_L \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \Gamma.$$

由开尔文定理知 $\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t} = 0$,又由亥姆霍兹涡管保持性定理,即可知道涡管强度在运

动过程中也保持不变. 亥姆霍兹涡管强度保持性定理也称为亥姆霍兹第二定理.

例 5.2 对无粘性密度为常值的流体,在体力有势条件下作定常运动,试证明:

(1) 若作平面运动,则沿流线,涡量 $\boldsymbol{\omega}$ 保持不变;

(2) 若作 $V_\theta=0$ 的轴对称运动,则沿流线,$\dfrac{\omega}{r}$保持不变.

证明 (1) 在平面运动中,有

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial v}{\partial z}=0,\ w=0,\ \boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{k}.$$

在流动平面(xy 平面)上任取一小流管,如图 5.10(a)所示,并在此流管中作面积为 A_1 的微元涡管(注意现在的涡管是和 xy 平面垂直的). 由于定常运动,迹线和流线是一致的,此微元涡管随流体质点一起沿着该管运动. 根据亥姆霍兹涡管强度保持定理,

$$\omega_1 A_1=\omega_2 A_2,$$

式中 ω_1 为 A_1 截面上涡量,ω_2 是另一时刻截面 A_2 上涡量. 由于已知密度为常值,连续性方程是

$$\rho A_1=\rho A_2,$$

因此有

$$A_1=A_2,$$

从而知沿流线有

$$\omega_1=\omega_2=\text{常量}.$$

而平面运动中 $\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{k}$,这就证明了沿流线 $\boldsymbol{\omega}$ 保持不变.

(2) 对于 $v_\theta=0$ 的轴对称运动,有

$$\frac{\partial v_r}{\partial\theta}=\frac{\partial V_z}{\partial\theta}=0.$$

涡量是

$$\boldsymbol{\omega}=\left(\frac{\partial v_z}{\partial r}-\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_\theta=\omega\boldsymbol{e}_\theta.$$

这说明涡的方向是 $\boldsymbol{e}_\theta$ 的方向,即与子午面(rz 平面)是垂直的.

在子午面上任取一小流管,如图 5.10(b)所示,在流管中作截面积为 A_1 的微涡管(是半径为 r_1 的环状管). 由于定常运动,此微元涡管随流体质点沿流管运动,在另一时刻成为截面为 A_2 的微元涡管. 根据亥姆霍兹涡管强度保持定理,

$$\omega_1 A_1=\omega_2 A_2,$$

式中 ω_1 是 A_1 截面上涡量,ω_2 是 A_2 截面上涡量.

根据质量守恒定理应有

$$2\pi r_1 A_1 \rho = 2\pi r_2 A_2 \rho,$$

即

$$A_1 r_1 = A_2 r_2,$$

因此沿流线

$$\frac{\omega_1}{r_1} = \frac{\omega_2}{r_2}.$$

又已知 $\boldsymbol{\omega}$ 沿 $\boldsymbol{e}_\theta$ 方向，在同一子午面上方向不变，因而沿流线，$\dfrac{\boldsymbol{\omega}}{r}$ 保持不变.

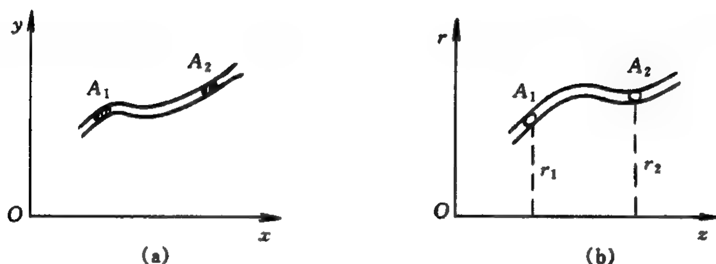


图 5.10　(a) 平面流中小流管　(b) 轴对称流中小流管

5.3　涡旋在无粘性不可压缩流体中所引起的速度场

流动区域中出现涡旋时，流动状态将发生变化. 确定涡旋所引起的速度场常常是重要的. 例如龙卷风和水卷等，可以用直涡线来模拟. 本节将导出它的感生流动具有着包围涡线的环形流线，感生速度和所讨论点到涡线的距离成反比. 因而在近涡线处流体质点高速运动，形成了强烈的低压，使得水、尘土甚至物体被卷吸入内飞旋. 这种涡旋作用就是龙卷风和水卷等自然现象的根源.

(一) 涡旋场感生的速度场

设在流场有限区域 τ 内给定涡旋场，流体是不可压缩的且在整个流场中无散度场，即

$$\begin{aligned} &\text{在 } \tau \text{ 内}: \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega}, \\ &\text{在 } \tau \text{ 外}: \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 0, \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

由于 $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$，一定存在矢量势 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{v} = \operatorname{rot} \boldsymbol{B}$，因此在区域 τ 内，

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{B} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{B}) - \nabla^2 \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\omega}.$$

假定 $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$（下面将说明这个假定的意义），则上式是

$$\nabla^2 \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{\omega}. \tag{5.3.2}$$

(5.3.2)式是矢量型的泊松方程，有解

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{4\pi}\iiint_\tau \frac{\boldsymbol{\omega}(\xi,\eta,\zeta)}{r}\mathrm{d}\tau, \tag{5.3.3}$$

式中 $$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$$

是积分元到所求感应点的距离. 对应速度场是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= \mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} = \frac{1}{4\pi}\nabla\times\iiint_\tau \frac{\boldsymbol{\omega}(\xi,\eta,\zeta)}{r}\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{4\pi}\iiint_\tau \nabla\times\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{r}\right)\mathrm{d}\tau = -\frac{1}{4\pi}\iiint_\tau \frac{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\omega}}{r^3}\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{4\pi}\iiint_\tau \frac{\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}}{r^3}\mathrm{d}\tau. \end{aligned}\tag{5.3.4}$$

下面讨论假定$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ 的意义.

记∇'是对积分变量(ξ,η,ζ)的微分算子. 有

$$\nabla' r = -\nabla r,$$

因此

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{B} &= \frac{1}{4\pi}\iiint_\tau \nabla\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\boldsymbol{\omega}\mathrm{d}\tau = \frac{1}{4\pi}\iiint_\tau\left(-\frac{1}{r^2}\nabla r\right)\cdot\boldsymbol{\omega}\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{4\pi}\iiint_\tau\left(\frac{1}{r^2}\nabla' r\right)\cdot\boldsymbol{\omega}\mathrm{d}\tau = -\frac{1}{4\pi}\iiint_\tau \nabla'\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\boldsymbol{\omega}\mathrm{d}\tau \\ &= -\frac{1}{4\pi}\iiint_\tau\left[\nabla'\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{r}\right)-\frac{1}{r}\nabla'\cdot\boldsymbol{\omega}\right]\mathrm{d}\tau = -\frac{1}{4\pi}\iiint_\tau \nabla'\cdot\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{r}\right)\mathrm{d}\tau \\ &= -\frac{1}{4\pi}\oiint_A \frac{\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{n}}{r}\mathrm{d}A.\end{aligned}$$

根据涡面定义,在 A 上$\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{n}=0$,于是

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0.$$

因此上述的推导及结果是正确的.

(二) 涡线感生的速度场 比奥-萨瓦尔公式

对于已知涡量场求感生速度场的问题,这里不打算作全面讨论,仅考虑涡旋场是细涡管的情况.

设想涡量集中在一根十分细的涡管上,可以近似地把它看成是几何上的一条线. 这常称为涡线(或涡丝).

在此涡管上取微元管段 $\mathrm{d}l$,截面积是 A,因而体积是 $A\mathrm{d}l$. 设涡强度分布为 $\boldsymbol{\omega}$(图 5.11),则

$$\boldsymbol{\omega}\mathrm{d}\tau = \boldsymbol{\omega}A\mathrm{d}\boldsymbol{l}.$$

令 $$\lim_{\substack{A\to 0\\ \omega\to\infty}} A\omega = \Gamma.$$

Γ 即速度环量，称为涡线强度，因此

$$\boldsymbol{\omega}\mathrm{d}\tau = \Gamma \mathrm{d}\boldsymbol{l}.$$

将此式代入(5.3.4)式得到

$$\boldsymbol{v} = \frac{\Gamma}{4\pi}\int_l \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}}{r^3}. \qquad (5.3.5)$$

式中 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的方向与 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向一致. (5.3.5)式就是涡线诱导速度的公式. 通常称为比奥－萨瓦尔公式.

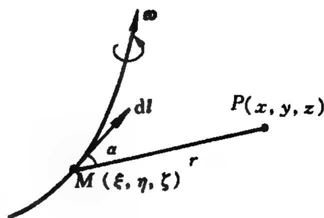


图 5.11　空间涡线

例 5.3　求圆周形涡所感生的速度场.

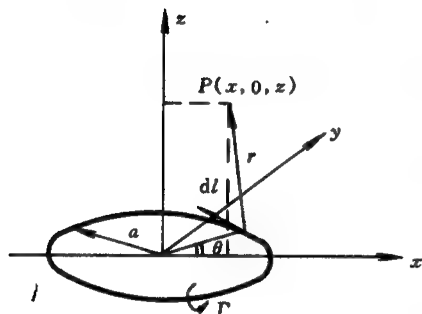


图 5.12　圆周涡线

解　在实际问题中常可遇到圆环状涡管. 由于涡环截面上线尺度与圆环半径相比是小量，可简化为圆涡线.

设 xy 平面上有一半径为 a 的圆周涡线，z 轴过该圆周的圆心(图 5.12)，涡线强度是 Γ. 根据比奥－萨瓦尔公式，可求流场中任一点由圆周涡线所感生的速度.

取柱坐标系(ρ,θ,z). 它与直角坐标系 $Oxyz$ 的关系为

$$x = \rho\cos\theta,\quad y = \rho\sin\theta$$

以及

$$\boldsymbol{e}_x = \cos\theta\,\boldsymbol{e}_r - \sin\theta\,\boldsymbol{e}_\theta,$$
$$\boldsymbol{e}_y = \sin\theta\,\boldsymbol{e}_r + \cos\theta\,\boldsymbol{e}_\theta.$$

由于轴对称，所有过 z 轴的子平面上运动相同，因此只需考察 $\theta = 0$ 平面上 $P(x,o,z)$点的诱导速度.

$$\boldsymbol{r} = (x - a\cos\theta)\,\boldsymbol{e}_x - a\sin\theta\,\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$$
$$= (x\cos\theta - a)\,\boldsymbol{e}_r - x\sin\theta\,\boldsymbol{e}_\theta + z\boldsymbol{e}_z,$$
$$\mathrm{d}\boldsymbol{l} = a\mathrm{d}\theta\boldsymbol{e}_\theta,$$
$$\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r} = a(a - x\cos\theta)\mathrm{d}\theta\boldsymbol{e}_z + az\mathrm{d}\theta\boldsymbol{e}_r,$$

所以诱导速度为

$$\boldsymbol{v} = \frac{\Gamma}{4\pi}\oint\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}}{r^3} = \frac{\Gamma a}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(a - x\cos\theta)}{r^3}\mathrm{d}\theta\boldsymbol{e}_z + \frac{\Gamma}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{az}{r^3}\,\mathrm{d}\theta\boldsymbol{e}_r.$$

适当变换后上式积分可化为第一类和第二类完全椭圆积分.

为了简便和易于分析，下面仅求出 z 轴上任一点$P(o,o,z)$的诱导速度

$$v = \frac{\Gamma a^2}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{r^3}\mathrm{d}\theta \boldsymbol{e}_z + \frac{\Gamma a z}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{r^3}\mathrm{d}\theta \boldsymbol{e}_r$$
$$= \frac{\Gamma}{2}\frac{a^2}{(a^2+z^2)^{3/2}}\boldsymbol{e}_z.$$

从这个结果可以看到 z 轴上诱导速度有如下特点：

(ⅰ) 如 $\Gamma>0$，即如图所示的环量方向，则 z 轴上任一点的诱导速度都是沿轴线正方向，速度大小随环量增加；

(ⅱ) 速度值是上下对称的；

(ⅲ) 随圆周形涡线的圆周半径 a 的增大，速度将减小；

(ⅳ) 随距圆周形涡线的距离(即$|z|$)减小，速度增大，在 $z=0$ 的圆心处速度达极大值$\dfrac{\Gamma}{2a}$.

圆周涡线上任一点同样要在涡线上其它点影响下产生运动，因此圆周涡线本身要以一定速度移动，但是要求这个速度是相当困难的.

(三) 直涡线感生的速度场

在研究涡量场感生速度场时，最简单然而也是十分重要的是直涡线所感生的速度场，许多涡旋运动都可以认为是由直涡线组成的涡旋的运动. 这一部分首先导出直涡线所感生速度场的速度公式，然后讨论涡对、卡门涡街感生的流体运动.

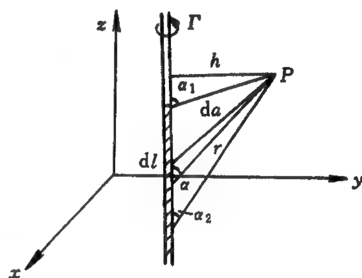


图 5.13 直涡线

图 5.13 画出了和 z 轴平行的直涡线段，它的强度是 Γ. 考虑和直涡线段垂直距离为 h 的空间点 P 的速度.

由于 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mathrm{d}l\boldsymbol{e}_z$，$\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{e}_r$，

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r} = r\mathrm{d}l\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_r = r\mathrm{d}l\sin\alpha\boldsymbol{e}_\theta,$$

$$\mathrm{d}l=\frac{r\mathrm{d}\alpha}{\sin\alpha},\quad r=\frac{h}{\sin\alpha},$$

代入(5.3.5)式求得

$$v = \frac{\Gamma}{4\pi}\int_{\alpha_2}^{\alpha_1}\frac{\sin\alpha}{h}\mathrm{d}\alpha\boldsymbol{e}_\theta = \frac{\Gamma}{4\pi h}(\cos\alpha_2-\cos\alpha_1)\boldsymbol{e}_\theta. \tag{5.3.6}$$

这就是直线涡段所诱导产生的速度场.

特别地，如果该直涡线是无限长的，则 $\alpha_1=\pi$，$\alpha_2=0$，其诱导产生的速度场是

$$v = \frac{\Gamma}{2\pi h} e_\theta. \tag{5.3.7}$$

从(5.3.7)式可以看到,无限长直线涡所诱导的速度场有这样几个特点:速度方向是沿圆周切线方向的,该圆周在与直涡线垂直的平面上,且以直涡线与平面的交点为圆心;速度大小除与涡线强度 Γ 有关外,只与所求点到直涡线的垂直距离 h 有关. 因此无限长直涡线对应的是平面流场,可以把无限长的直涡线看成是平面上某点强度为 Γ 的平面点涡. 这样,无限长直涡线影响下流体运动问题可以归结为在点涡影响下的平面流动问题.

还应指出,无限长直涡线邻域流体都是绕此直线旋转,因此并不引起直涡线本身的运动,即单根无限长直涡线不对自身产生诱导速度. 另外,从(5.3.7)式知道,速度是与到直涡线的距离 h 成反比,越靠近直涡线,涡旋作圆周运动旋转越快,当 $h \to 0$ 时流速 $V \to \infty$. 这在物理上当然是不可能的. 但注意到前面我们指出过涡线是细涡管的一种近似,为了克服所说的困难,一般可将直线涡内部狭窄区考虑成“涡核”,具有半径 R_0. 在 $R \geqslant R_0$ 的区域,诱导速度公式(5.3.7)是适用的;在 $R < R_0$ 的区域内则作另外的考虑,通常是被看成“刚性核”,即速度随 R 线性减少,当 $R \to 0$ 时有 $v \to 0$. 当然,这仅仅是在所讨论的问题涉及直线涡本身结构时才作这样的考虑的,一般情况则不需要.

1. 涡对

讨论 n 条平行直线涡的问题,即相当于讨论 n 个点涡所引起的平面流动问题.

设第 i 个点涡坐标为 (x_i, y_i),涡强度是 Γ_i. 对于流体中任一点 (x, y),该点涡的诱导速度按(5.3.7)式是

$$\begin{cases} u_i = -\dfrac{\Gamma_i}{2\pi} \dfrac{y - y_i}{R_i^2}, \\ v_i = \dfrac{\Gamma_i}{2\pi} \dfrac{x - x_i}{R_i^2}, \end{cases} \tag{5.3.8}$$

式中

$$R_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2,$$

因此 n 个点涡同时存在时对 (x, y) 这一点所产生的诱导速度是

$$\begin{cases} u = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(-\dfrac{\Gamma_i}{2\pi} \dfrac{y - y_i}{R_i^2} \right), \\ v = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\dfrac{\Gamma_i}{2\pi} \dfrac{x - x_i}{R_i} \right). \end{cases} \tag{5.3.9}$$

如果所考虑的点是 n 个点涡中第 j 个点涡所在的点,那末这第 j 个点涡不对自身产生诱导速度,而其它 $n-1$ 个点则将使第 j 个点涡产生运动,速度是

$$\begin{cases} u_j = \dfrac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t} = \sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\left(-\dfrac{\Gamma_i}{2\pi}\dfrac{y_j - y_i}{R_{ji}^2}\right), \\ v_j = \dfrac{\mathrm{d}y_j}{\mathrm{d}t} = \sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\left(\dfrac{\Gamma_i}{2\pi}\dfrac{x_j - x_i}{R_{ji}^2}\right). \end{cases} \tag{5.3.10}$$

将(5.3.10)式每个方程两边乘以 Γ_j 后对 j 求和,可以得到

$$\sum_{j=1}^{n}\Gamma_j\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\left(-\frac{\Gamma_j\Gamma_i}{2\pi}\frac{y_j - y_i}{R_{ji}^2}\right) = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{n}\Gamma_j\frac{\mathrm{d}y_j}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\left(\frac{\Gamma_j\Gamma_i}{2\pi}\frac{x_j - x_i}{R_{ji}^2}\right) = 0.$$

对 t 积分有

$$\sum_{j=1}^{n}\Gamma_j x_j = \text{常量}, \quad \sum_{j=1}^{n}\Gamma_j y_j = \text{常量}. \tag{5.3.11}$$

对于这 n 个点涡强度不变,则 $\sum\limits_{j=1}^{n}\Gamma_j$ 也不变,因此有

$$\begin{cases} x_0 = \sum\limits_{j=1}^{n}\Gamma_j x_j \Big/ \sum\limits_{j=1}^{n}\Gamma_j = \text{常量}, \\ y_0 = \sum\limits_{j=1}^{n}\Gamma_j y_j \Big/ \sum\limits_{j=1}^{n}\Gamma_j = \text{常量}. \end{cases} \tag{5.3.12}$$

类似于质量惯性中心,(x_0, y_0)称为这 n 个点涡的涡旋惯性中心. (x_0, y_0)指的是几何点,(5.3.12)说明这样一个几何点是不会改变的. 而位于(x_0, y_0)这点上的流体质点在这 n 个点涡影响下产生速度,是要运动的,所以两者不可混淆.

以上讨论的是 n 个点涡的情况,现在讨论涡对.

涡对指在流场中存在一对点涡,即 $n=2$ 的情况. 在自然界中存在着涡对,如热带双台风等. 下面导出有关的一些表达式,从中可以看到涡对的一些有趣现象.

涡对的诱导速度. 对于流场中任意点(x, y),涡对产生的诱导速度是

$$\begin{cases} u = -\dfrac{\Gamma_1}{2\pi}\dfrac{y - y_1}{R_1^2} - \dfrac{\Gamma_2}{2\pi}\dfrac{y - y_2}{R_2^2}, \\ v = \dfrac{\Gamma_1}{2\pi}\dfrac{x - x_1}{R_1^2} + \dfrac{\Gamma_2}{2\pi}\dfrac{x - x_2}{R_2^2}. \end{cases} \tag{5.3.13}$$

涡对相互影响所产生的自身运动速度是

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{dx_1}{dt} = -\dfrac{\Gamma_2}{2\pi}\dfrac{y_1 - y_2}{R_{12}^2}, \\ v_1 = \dfrac{dy_1}{dt} = \dfrac{\Gamma_2}{2\pi}\dfrac{x_1 - x_2}{R_{12}^2}; \end{cases} \tag{5.3.14}$$

$$\begin{cases} u_2 = \dfrac{dx_2}{dt} = -\dfrac{\Gamma_1}{2\pi}\dfrac{y_2 - y_1}{R_{21}^2}, \\ v_2 = \dfrac{dy_2}{dt} = \dfrac{\Gamma_1}{2\pi}\dfrac{x_2 - x_1}{R_{21}^2}. \end{cases} \tag{5.3.15}$$

涡对的涡旋惯性中心是

$$x_0 = \frac{\Gamma_1 x_1 + \Gamma_2 x_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2}, \quad y_0 = \frac{\Gamma_1 y_1 + \Gamma_2 y_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2}. \tag{5.3.16}$$

合并(5.3.16)的两式可以得到

$$\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{5.3.17}$$

这说明了涡对的涡旋惯性中心在涡对两个点涡的联线上. 再由(5.3.14)和(5.3.15)两式得到

$$\begin{cases} \dfrac{u_1}{v_1} = -\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \\ \dfrac{u_2}{v_2} = -\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \end{cases} \tag{5.3.18}$$

这说明两个点涡运动速度垂直于其联线,同时也说明了涡对距离及每个点涡跟涡旋惯性中心距离保持不变. 综合这几点,就知道涡对相互作用引起的自身运动是绕涡旋惯性中心的旋转运动,其旋转角速度 Ω 为

$$\Omega = \frac{v_1}{x_1 - x_0} = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\pi R_{12}^2}. \tag{5.3.19}$$

Ω 与绝对值大的 Γ_i 同号,即涡对绕惯性中心转动的方向和强度大的那个点涡转动方向相同(图 5.14(a)、(b)).

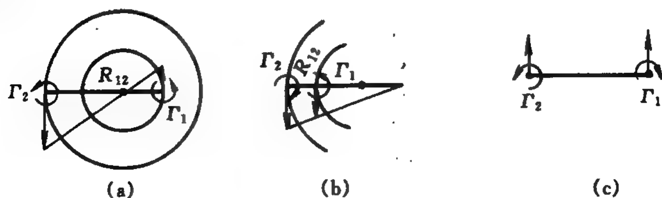


图 5.14　涡对

现在考察特殊的涡对:强度相同均为 Γ,旋转方向相反的两个点涡所构成的

涡对.(图 5.14(c))

由(5.3.16)和(5.3.19)两式可知此时涡旋惯性中心在无穷远处,旋转角速度为零. 这两个点涡以相同的速度垂直于两点涡联线方向运动,运动速度是

$$U=\frac{\Gamma}{2\pi R_{12}}. \tag{5.3.20}$$

它们的诱导速度是

$$\begin{cases} u=\dfrac{\Gamma}{2\pi}\left(\dfrac{y-y_1}{R_1^2}-\dfrac{y-y_2}{R_2^2}\right), \\ v=\dfrac{\Gamma}{2\pi}\left(-\dfrac{x-x_1}{R_1^2}+\dfrac{x-x_2}{R_2^2}\right). \end{cases} \tag{5.3.21}$$

把这两个速度分量表达式代入流线方程$\frac{u}{\mathrm{d}x}=\frac{v}{\mathrm{d}y}$,积分得

$$R_1/R_2=\text{常量}. \tag{5.3.22}$$

这表明诱导流场的流线是对称于涡对联线中点的圆周族,如图 5.15 所示.

由于点涡本身是在运动的,如果建立固连于这两个点涡的运动坐标系,那么相对该坐标系的流场流线如图 5.16 所示,流线的一部分形成封闭曲线环绕点涡,流动如同柱体绕流.

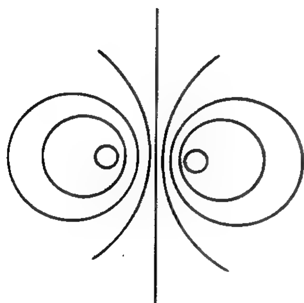


图 5.15 强度相同,方向相反两个点涡的涡对所诱导流场的流线

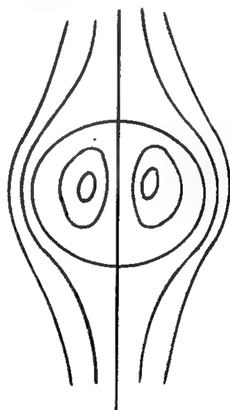


图 5.16 运动坐标系中,强度相同,方向相反的两个点涡的涡对所诱导流场的流线

这个特殊的点涡对有重要的意义. 例如,热带双台风会出现打转现象,就可以用此涡对来进行模拟和解释. 又如飞机在刚起飞或降落时,由于靠近地面,其受力状况和在高空飞行时不一样,往往会发生一些估计不到的情况. 在无粘性不可压缩流体的无旋运动这一章内,可以看到在讨论物体受力时往往可以把它

看作一个点涡，当飞机起飞或降落时，地面效应使得我们可以把流场看成是所述这个特殊涡对所诱导的流场，从而容易求出流场的速度，确定飞机的受力状况并解释所发生的现象.

2. 卡门涡街

H. 贝纳德在1908年做了圆柱体在流体中运动的实验，第一次发现柱体后面左右两侧分离出两列涡旋，它们两两间隔、旋转方向相反，涡旋间距离不变，而两排涡列间距只和物体的线尺度有关，这就是有名的卡门涡街(图5.17).

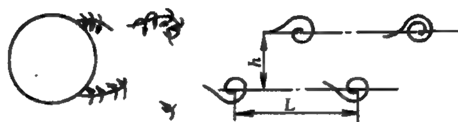


图5.17　卡门涡街

1911年卡门在哥丁根当助教. 当时普朗特正在研究边界层的问题，他交给了一位博士研究生一个任务，设计一个水槽使他能观察圆柱体后面的流动分离，以便用实验来核对按边界层理论计算出来的分离点. 出乎这位研究生的意外，他发现水槽中水流不断地发生激烈的摆动，即使圆柱体经过非常细心的加工，或者水槽不断调整，流动不稳定现象依然存在. 卡门对此发生了很大兴趣，感到这一现象一定有内在客观原因。他对涡系的稳定性进行了计算，接连发表了两篇论文，对上述现象作了合理的解释. 卡门的工作以后得到了很多实际应用，人们把此涡街称为卡门涡街. 本书附录(A)照片5显示了绕圆柱流场随 Re 数的变化，在 $Re=4\times10^4$ 时，圆柱后形成尾流区，涡脱离成为涡街. 附录(A)中的照片6更清楚地显示了卡门涡街.

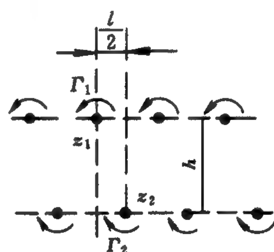


图5.18　卡门涡街中点涡排列

现在简单分析卡门涡街.

卡门涡街由两条平行直线涡列构成，相距为 h，每条涡列中点涡相距 l. 可以求出图5.18所示卡门涡街中 $-\Gamma_1=\Gamma_2=\Gamma$ 及 z_1 点涡和 z_2 点涡的速度是

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = \dfrac{\Gamma}{2l}\operatorname{sh}\dfrac{2\pi h}{l}\Big/\left(\operatorname{ch}\dfrac{2\pi h}{l}-\cos\dfrac{2\pi b}{l}\right), \\ v_1 = v_2 = -\dfrac{\Gamma}{2l}\sin\dfrac{2\pi b}{l}\Big/\left(\operatorname{ch}\dfrac{2\pi h}{l}-\cos\dfrac{2\pi b}{l}\right). \end{cases} \tag{5.3.23}$$

式中 b 是 z_1 和 z_2 两点的水平间距. 设涡街是沿 x 轴方向运动的，则 $v_1=v_2=0$，从而 $\sin\dfrac{2\pi b}{l}=0$，因此 $b=0$ 或 $b=\dfrac{l}{2}$. $b=0$ 对应于上下点涡对齐的对称涡

街,可以证明是不稳定的,在贝纳德实验中极难观察到;$b=\frac{l}{2}$则对应于贝纳德实验中所发现的卡门涡街. 实际上卡门涡街也不是绝对稳定的,已证明只有当$\frac{h}{l}=0.281$时才是稳定的. H. 布伦克和L. 利伯斯等人对规则涡街的出现作了广泛的观察,当雷诺数$Re=\frac{Ud}{\nu}$在$60\sim5\times10^3$范围内时,才可观察到涡街. 当雷诺数高于5×10^3时是完全的湍流尾流. 记无量纲涡街频率数f^*为

$$f^*=\frac{fd}{U}. \tag{5.3.24}$$

f是涡从圆柱后脱落进入卡门涡街的频率,d是圆柱直径,U是圆柱速(或来流速). 图5.19绘出了f^*随雷诺数变化的曲线. 当雷诺数较高时,f^*值近似为0.21,可一直较好地保持到$Re=2\times10^5$. 当Re继续升高,规则的涡街不再存在. 但在$Re>3\times10^6$时,涡街重新出现.

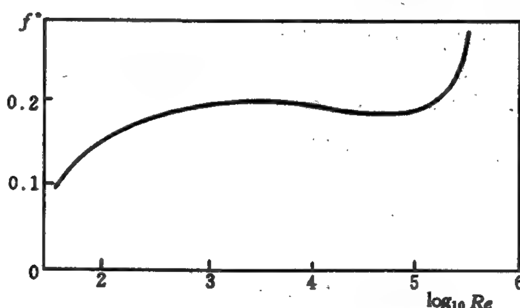


图5.19 圆柱卡门涡街涡发放与雷诺数关系

卡门涡街不仅在圆柱后出现,也可在其他形状物体后形成,例如在高层建筑物、烟囱、铁塔等后形成. 这些建筑物受强风作用而引起的振动往往与这种涡街有关,这是很危险的. 我们知道一个物体如受外力作用发生了一定的变形,当外力去掉以后该物体就会产生振动,称为自由振动. 卡门涡街后涡的交替发放会在物体上产生垂直于流动方向的交变侧向力,其频率与流动速度和物体尺度有关. 如果这样的发放频率和物体自由振动频率相耦合时,就会使物体振动加大,甚至对物体造成破坏.

1940年11月7日美国著名的塔科马海峡大桥在八级大风中产生了强烈的涡街发放,桥身发生了剧烈的扭曲振动,振幅达56英尺,不到一小时这座价值640万美元的建筑物终于崩塌化为碎石. 这是卡门涡街造成巨大破坏的著名例子. 我国曾在北京郊区建造了一座高达325米的气象塔,以研究北京地区大气污染情况. 该塔体用15根纤绳固定在地面上,是亚洲最高的气象塔. 但在竣工

后不久便出现了奇怪的现象:在天气晴朗微风吹拂时,高塔发生强烈振动,伴之以巨大轰鸣声,使附近居民感到担心. 后经科研人员的详细测量和分析,终于搞清了这一现象的原因,就是在那样的风速下气流在塔的纤绳这一柱体上发放涡旋,形成了卡门涡街,其频率与纤绳的自振频率相耦合而发出了轰鸣声.

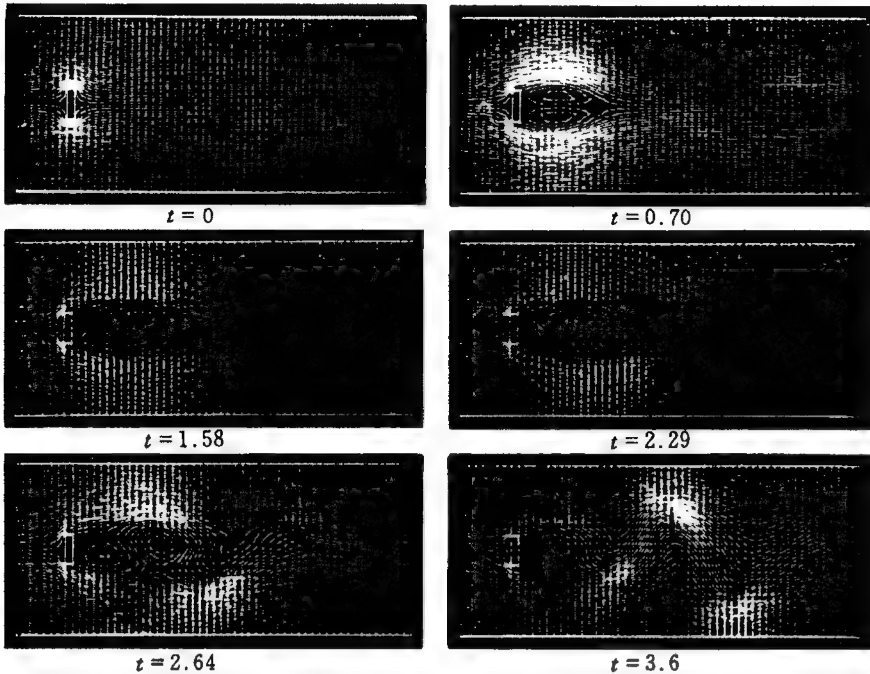


图 5.20　长方形柱体卡门涡街的发展 $Re=200$, $d/H=1/6$

曾经有不少实验研究了卡门涡街的发展过程. 但理论研究却相当困难,这是因为太复杂的缘故. J.E.弗罗姆等人在 1963 年对于长方形柱体卡门涡街的发展进行了数值模拟计算. 对不计体力的不可压缩粘性流体二维运动的纳维-斯托克斯方程引进流函数 ψ 和涡量 ω 后得到了如下的方程,

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}+\frac{\partial u\omega}{\partial x}+\frac{\partial v\omega}{\partial y}=\nu\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}=-\omega.$$

采用有限差方法数值求解了这两个方程. 计算结果的一部分可见图 5.20 和图 5.21(引自参考文献[1]). 图 5.21 是 $Re=200$,长方形宽高比为 $d/H=1/6$ 时,涡街的形成过程. 在开始时,流场和无粘流相仿,逐步在柱体后部出现了一对

涡,随后涡对发展,脱离进入下游. 这个涡脱离的过程重复出现,形成了涡街. 图 5.21 则是对 $Re=300$,宽高比 $d/H=1/6$ 情况,在 $t=4.39$ 时刻,从静止坐标和运动坐标所看到的卡门涡街图案((a)、(b)),以及此时刻的质点线图案(c).

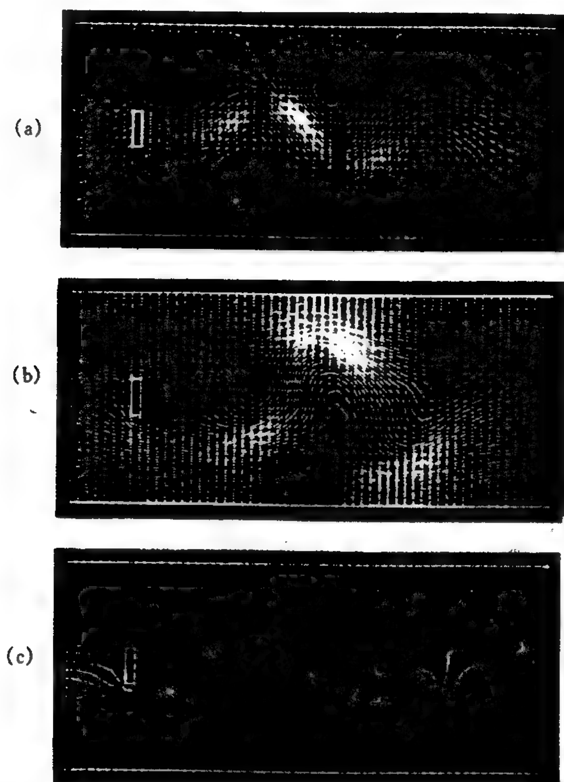


图 5.21 长方形柱体卡门涡街 $t=4.39$, $Re=300$, $d/H=1/6$
(a) 静止坐标 (b) 运动坐标 (c) 质点线

图 5.22 是绕长方形柱体的卡门涡街图象. 它是由 H. 萨卡莫托在烟风洞中取得的,见(参考文献[8]). 长方形柱体高为 h,宽为 w,流动 Re 数为 $2.7\times10^2\sim7.3\times10^2$. 图显示了不同高宽比$\frac{h}{w}$时的卡门涡街.

T. 萨尔普卡亚对倾斜安置平板所出现的涡街进行了实验和数值计算. 图 5.23 是实验及数值计算图(取自参考文献[9]),平板倾斜 50°,流动从静止启动,渐近雷诺数 $Re\sim11\,000$,图示 $t=74$s 时实验和数值计算得到的卡门涡街,两者吻合较好.

3. 兰金组合涡

前面所讨论的直线涡,实际上是对圆柱涡的一种近似,认为它的截面线尺度是个小量,并且不考虑它的内部结构,把它看成是一条涡线. 在自然界中,还有一些涡旋,如台风、旋风和江河湖海中出现的涡旋等,必须要考虑到涡旋内的结构.

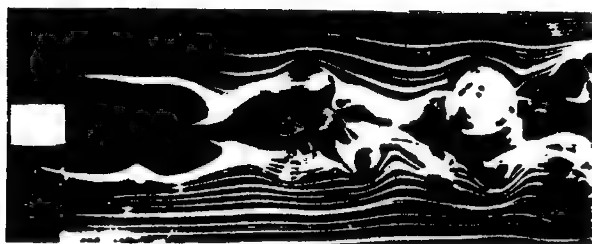
假定在无界流体中有一圆柱形涡管,横截面圆的半径是 R. 在圆涡内部 $r<R$,流体如同刚体一样以角速度 Ω 绕圆心旋转,因此流体速度是

$$\boldsymbol{v}=\Omega\boldsymbol{e}_z\times r\boldsymbol{e}_r=\Omega r\boldsymbol{e}_\theta, \tag{5.3.25}$$

涡量是



(ⅰ)



(ⅱ)



(ⅲ)



(ⅳ)



(v)

图 5.22 烟风洞实验显示的长方形柱体绕流卡门涡街.

长方形柱体高 h,宽 w,$Re\left(=\dfrac{U_0 w}{\gamma}\right)=2.7\times10^2\sim7.3\times10^2$.

(i) $\dfrac{h}{w}=1.75$; (ii) 2.0; (iii) 3.0; (iv) 4.0; (v) 5.0.

$$\boldsymbol{\omega}=\text{rot }\boldsymbol{v}=2\Omega\boldsymbol{e}_z. \tag{5.3.26}$$

流体速度与距离成正比,这种结构的涡称为受迫涡.

在未受其它扰动流体中的这样一种受迫涡,其中心保持静止. 如果在原有速度为 V 的流场中,加入这样的涡,则涡也将以 V 随流体一起运动. 自然界中台风、飓风可作为这类涡旋的例子,其直径有几百千米,并以很慢的速度移动. 在气旋范围内风力达暴风程度,但却存在一个直径 20km 左右的中心区域,情况相当平静.

在圆涡外部 $r>R$,流体速度等于把此涡看成为直涡线所感生的速度

$$\boldsymbol{v}=\frac{\Gamma}{2\pi r}\boldsymbol{e}_\theta. \tag{5.3.27}$$

流体速度值与半径成反比,这通常称为自由涡. 易知自由涡是无旋的.

现在整个流场是由受迫涡和自由涡组合而成的,这样的涡旋称为兰金组合涡.

在圆涡边界上速度应当是连续的,

$$\Omega R=\frac{\Gamma}{2\pi R}.$$

由此可求出涡管强度 Γ,

$$\Gamma=2\pi\Omega R^2. \tag{5.3.28}$$

流场中压强分布可以由伯努利方程求得. 假定流场是无界的,并不计重力,下面分两个区域求压强分布.

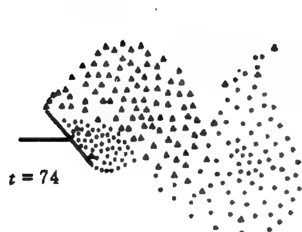
在自由涡区域($r>R$). 伯努利方程有如下形式,

$$p+\frac{\rho v^2}{2}=p_\infty+\frac{\rho v_\infty^2}{2},$$

式中 p_∞ 是无穷远处流体压强值,而由(5.3.27)式知无穷远处速度值 v_∞ 为零,



(a)



(b)

图 5.23　倾斜平板卡门涡街. 倾斜角 50°, Re～11 000, t = 74s.
(a) 实验　(b) 数值模拟. ●正涡, △负涡

因此流场中任一点压强为

$$p = p_\infty - \frac{\rho v^2}{2} = p_\infty - \frac{1}{8}\rho\frac{\Gamma^2}{\pi^2 r^2}. \tag{5.3.29}$$

这个结果告诉我们, r 越小, 速度越大, 压强越小. 在圆涡边界上, $r = R$ 处, 自由涡速最大, 压强最小,

$$U_0 = U_{\max} = \frac{\Gamma}{2\pi R}, \tag{5.3.30}$$

$$p_0 = p_{\min} = p_\infty - \frac{1}{2}\rho U_0^2 = p_\infty - \frac{1}{8}\rho\frac{\Gamma^2}{\pi^2 R^2}. \tag{5.3.31}$$

在圆涡区内($r \leqslant R$). 由于流体"刚性"旋转, 此时可以根据(2.4.5)

$$p-\frac{\rho}{2}\Omega^2 r^2=\text{常量}. \tag{5.3.32}$$

若取圆涡周界上一点,则上式又可写成

$$p-\frac{\rho}{2}\Omega^2 r^2=p_0-\frac{\rho}{2}\Omega^2 R^2. \tag{5.3.33}$$

将(5.3.31)式代入上式得到

$$\begin{aligned}p&=p_0-\frac{\rho}{2}\Omega^2 R^2+\frac{\rho}{2}\Omega^2 r^2\\&=p_\infty-\frac{1}{2}\rho U_0^2-\frac{\rho}{2}\Omega^2 R^2+\frac{\rho}{2}\Omega^2 r^2.\end{aligned}$$

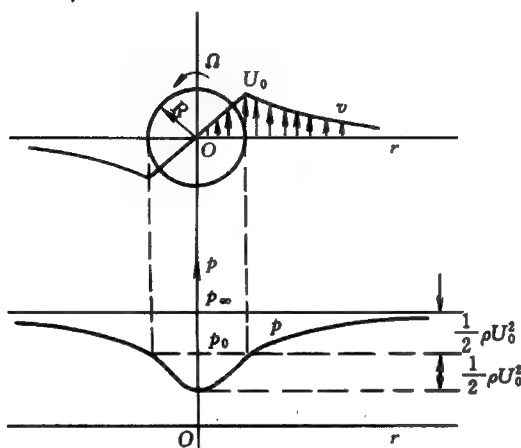


图 5.24 兰金组合涡的速度和压强分布

由于在 $r=R$ 处, $U_0=\Omega R$,所以

$$p=p_\infty-\rho U_0^2+\frac{\rho}{2}\Omega^2 r^2. \tag{5.3.34}$$

由上式可知在圆涡内,压强随 r 减小而减小,在核心处($r=0$),压强达最小值 $p_\infty-\rho U_0^2$.

这样,对于兰金组合涡,压强分布随半径 r 的减小而减小. 因此物体接近涡旋时,如接近台风,水旋时,常有被卷吸入内的危险. 从上面几式也可看到,圆涡强度 Γ 越大,或者圆涡半径 R_0 越小,核心处的压强越低.

兰金组合涡的速度分布和压强分布可见图 5.24所示.

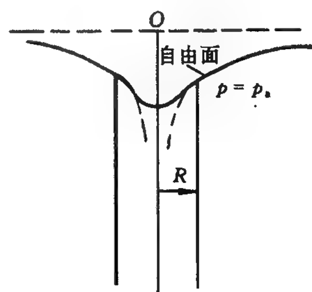


图 5.25 有自由面的兰金组合涡

以上讨论兰金组合涡时，不计重力．如果考虑重力，并有自由面的兰金组合涡，则可求得自由面形状，如图 5.25 所示．自由面越近核心越下凹，我们所看到的水中的旋涡就是这种形状．

建议本节参看录像Ⅲ－8 中的有关部分．

5.4　涡旋运动的产生，扩散及衰减

在前几节中，涡旋运动的一些性质已作了介绍，这一节将对涡旋运动的产生和扩散作一定的论述．这是一个相当困难的问题．因而所做的介绍是初步的，并且局限在一定范围之内，其中一部分是理论的推导，一部分是定性的描述．

由纳维－斯托克斯方程出发所导出速度环量的随体导数公式是(5.1.15)式，

$$\frac{\mathrm{D}\Gamma}{\mathrm{D}t}=\oint_{l}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}-\oint_{l}\frac{1}{\rho}\nabla p\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}+\oint_{l}\nu\left[\Delta\cdot\boldsymbol{v}+\frac{1}{3}\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\right]\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}.$$

体力、流体非正压性和粘性是影响速度环量随体变化的三个因素．这三个因素将使原本无旋的运动有可能成为有旋，形成涡旋运动．下面分别讨论这三个因素的影响．

(一) 无粘性非正压流体的情况

设无粘性流体非正压，但体力有势 Π，使得 $\boldsymbol{F}=-\nabla\Pi$，则(5.1.15)式成为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}\Gamma}{\mathrm{D}t}&=-\oint_{L}\nabla\Pi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}-\oint_{L}\frac{1}{\rho}\nabla p\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\\&=-\oint_{L}\mathrm{d}\Pi-\oint_{L}\frac{1}{\rho}\mathrm{d}p=-\oint_{L}\frac{1}{\rho}\mathrm{d}p.\end{aligned}\tag{5.4.1}$$

引进比容 $v=\dfrac{1}{\rho}$，(5.4.1)式又可写成

$$\frac{\mathrm{D}\Gamma}{\mathrm{D}t}=-\oint_{L}v\mathrm{d}p.\tag{5.4.2}$$

$p=$常量的面称为等压面，$v=$常量的面为等容面．对于正压流体 $p=p(\rho)$，显然等压面和等容面是重合的，但对于一般的非正压流体，等压面和等容面将相交．作一系列彼此相差一个单位的等压面，同时作一系列彼此相差一个单位的等容面，这样整个流体空间被分隔成一系列由两个相邻的等压面和两个相邻的等容面构成的管子．这些管子通常称为单位等压－等容管．

现在计算图 5.26 所示单位等压－等容管 $ABCD$ 的周线 L 的线积分 $\oint_{L}v\mathrm{d}p$．计算前，先规定从 ∇p 到 $\nabla\rho$ 的转动方向为环路积分正向．

注意在 AD 和 BC 上 p 恒定:$\mathrm{d}p=0$;在 AB 和 DC 上 v 恒定:$\mathrm{d}v=0$,于是线积分

$$\oint_L v\mathrm{d}p = \int_{AB+BC+CD+DA} v\mathrm{d}p = -1.$$

当周线 L 改为相反方向时,有

$$\oint_L v\mathrm{d}p = 1,$$

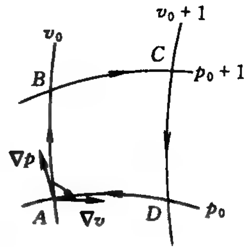


图 5.26 单位等压-等容管

因此环路线积分是

$$-\oint_L v\mathrm{d}p = \begin{cases} +1, \text{当积分环路正向时}, \\ -1, \text{当积分环路反向时}. \end{cases} \tag{5.4.3}$$

我们把 $-\oint_L v\mathrm{d}p = 1$ 的等压-等容单位管称为正的单位管;把 $-\oint_L v\mathrm{d}p = -1$ 的等压-等容单位管称为负的单位管. 在一般情况下,周线 L 包围许多单位等压-等容管时,将有

$$-\oint_L v\mathrm{d}p = N_1 - N_2, \tag{5.4.4}$$

其中 N_1 是周线 L 所包围的正单位管的数目,N_2 为周线 L 所包围的负单位管数目. 这样,由(5.4.2)式得到

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t} = N_1 - N_2. \tag{5.4.5}$$

它可以表述为下述伯耶克内斯定理:

无粘流体若体力有势,则沿任何封闭流体线 L 的速度环量对时间的导数等于穿过此周线 L 的正的与负的单位等压-等容管数目之差.

由于速度环量刻划了旋涡的性质,因此伯耶克内斯定理说明了等压面和等容面的相交是形成旋涡的原因之一.

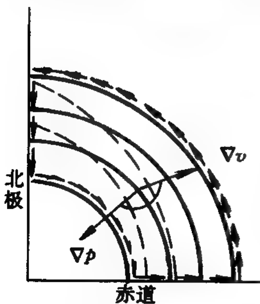


图 5.27 北半球信风形成

例 5.4 信风的形成.

考虑环绕地球的大气层,大气满足状态方程

$$pv = RT.$$

假定地球是圆球,在高度相同地方压强相同,因而大气的等压面是以地心为中心的球面. 其次,由于太阳对地面照射强度不同,在同一高度上赤道比北极温度高,因此沿球面从北极向赤道温度逐步升高. 根据气体状态方程,注意同一高度压强不变,因而比容在球面上从北极向赤道逐步增大. 另一方向,在同一地点,高度越高,气体越稀薄,比容将增大,这样等容面如图5.27虚线所示,自赤道到北极向上倾斜. 因此 ∇p 和 ∇v 相交,在图示周线中包

含正的单位等压－等容管，即

$$\frac{\mathrm{D}\Gamma}{\mathrm{D}t}>0,$$

从而大气产生图中箭头所示旋涡运动：在地面大气从北纬流向南纬，在赤道处上升，再在上层流回北纬，在北极处下降到地面．这种环流就是气象学中所称的信风．

（二）无粘性与体力无势流体的情况

设流体无粘性，以地球表面大气运动为例说明体力无势时涡旋的产生．

考虑地球自转，在固连在地球的运动坐标系中，流体相对运动方程是

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}_r}{\mathrm{D}t}=\boldsymbol{F}_b-\frac{1}{\rho}\nabla p-\boldsymbol{a}_e-2(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}_r),\tag{5.4.6}$$

式中$\boldsymbol{v}_r$为相对速度，$\boldsymbol{a}_e$是牵连加速度，$\boldsymbol{\Omega}$是地球自转角速度，并认为是恒定的．以R表示所研究流体质点到地球自转轴距离，则有

$$\boldsymbol{a}_e=-\nabla\left(\frac{\Omega^2R^2}{2}\right).$$

地球引力是有势的，$\boldsymbol{F}_b=-\nabla\Pi$，因此方程(5.4.6)化为

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}_r}{\mathrm{D}t}=-\nabla\left(\Pi-\frac{\Omega^2R^2}{2}\right)-\frac{1}{\rho}\nabla p-2(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}_r).\tag{5.4.7}$$

记
$$\widetilde{\boldsymbol{F}}=-\nabla\left(\Pi-\frac{\Omega^2R^2}{2}\right)-2(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}_r),$$

(5.4.7)式就可写成

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}_r}{\mathrm{D}t}=\widetilde{\boldsymbol{F}}-\frac{1}{\rho}\nabla p.\tag{5.4.8}$$

现在的形式和欧拉方程形式是完全相同的，但显然“体力”$\widetilde{\boldsymbol{F}}$是无势的．

在运动坐标系中，速度环量对时间导数是

$$\frac{\mathrm{D}\Gamma}{\mathrm{D}t}=\oint_L\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}_r}{\mathrm{D}t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\oint_L\frac{1}{\rho}\nabla p\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}-2\oint_L(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}_r)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}.\tag{5.4.9}$$

右边第一项的存在将产生信风，例5.4已说明过，第二项是科里奥利力对环量Γ变化的影响．取这样的环路：以位于地球自转轴上某点为圆心，作一垂直于该自转轴的圆周L为环路，令逆时针为正向．由于信风，圆周上每一点有自北到南的速度，于是

$(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}_r)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=(\boldsymbol{v}_r\times\mathrm{d}\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{\Omega}$是正值．因此(5.4.9)式第二项的存在使$\dfrac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t}$减少，产生了按顺时针方向

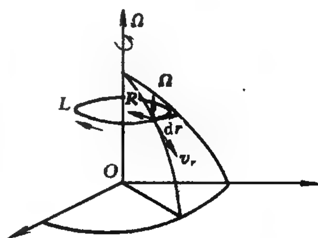


图5.28 科里奥利力对信风影响

由东向西的风. 因此信风不是严格由北向南吹,而是自东北向西南吹.

相对于一个以常角速度旋转的运动坐标系中的流体运动,通常称为旋转流体运动. 海洋和地核的运动,地球表面大气的运动,以及星系的运动等都是这样的运动. 研究其运动规律是地球物理和天体物理的重要内容. 方程(5.4.7)或(5.4.8)就是无粘流体旋转运动的基本方程.

从旋转流体运动基本方程可以看到,旋转流体运动的本质在于科氏力 $-2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}_r$ 的影响. 设旋转流体运动特征长度和速度分别是 L 和 U,旋转角速度 Ω,因此在非定常效应不大时惯性力特征尺度是

$$|(\boldsymbol{v}_r\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_r|\sim\frac{U^2}{L},$$

科氏力量级是

$$|\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}_r|\sim\Omega U.$$

定义无量纲罗斯比数 Ro

$$\frac{\text{惯性力量级}}{\text{科氏力量级}}\sim\frac{U^2/L}{\Omega U}=\frac{U}{\Omega L}\equiv Ro. \tag{5.4.10}$$

它是衡量科氏力效应,即旋转效应的重要参数. 当 $Ro\gg1$,可以不考虑旋转效应;当 $Ro\ll1$,旋转效应对流体运动有决定意义.

例 5.5 地转运动.

考虑固定在地球上的运动坐标系. 对于地球表面大气和海洋的大尺度运动,$L\sim10^6\text{m}$, $U\sim10\text{m/s}$,地球角速度 $\Omega\sim7\times10^{-5}\text{s}^{-1}$,所以 $Ro\sim0.1$. 罗斯比数很小,可以将惯性力全部略去,这样的运动称为地转运动. 由(5.4.7)式,地转运动的基本方程是

$$\nabla\left(gz-\frac{\Omega^2R^2}{2}\right)+2(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}_r)+\frac{1}{\rho}\nabla p=0. \tag{5.4.11}$$

如图 5.30 所示

$$\boldsymbol{\Omega}=\Omega\cos\theta\boldsymbol{j}+\Omega\sin\theta\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{v}_r=u\boldsymbol{i}+v\boldsymbol{j}+w\boldsymbol{k},$$

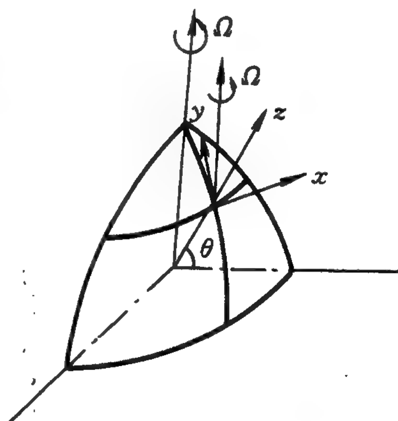


图 5.29 地转运动

离心力 $\frac{1}{2}\Omega^2R^2$ 要比重力 gz 小得多,可以略去,这样(5.4.11)式可以展开为

$$\frac{\partial p}{\partial x}=2\rho\Omega\sin\theta v-2\rho\Omega\cos\theta w, \tag{5.4.12a}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -2\rho\Omega\sin\theta u, \tag{5.4.12b}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g + 2\rho\Omega\cos\theta u. \tag{5.4.12c}$$

对于地球表面大气和海洋的大尺度运动，w 相对于 u、v 是个小量，可近似为零，并且 $\Omega u \ll g$，因而(5.4.12)式可简化为

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 2\rho\Omega\sin\theta v, \tag{5.4.13a}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -2\rho\Omega\sin\theta u, \tag{5.4.13b}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \tag{5.4.13c}$$

也可以写成

$$\nabla_{xy} p = \frac{\partial p}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\boldsymbol{j} = -2\rho\Omega\sin\theta \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v}_r \tag{5.4.14}$$

如图 5.30 所示，$\nabla_{xy}p$ 与$\boldsymbol{v}_r$正交，在等高面 z = 常数上等压线与流线平行，顺风向看右方是高压，左方是低压. 特别流线封闭时，逆时针的流线包围一个称为气旋的低压，而顺时针的流线包围一个称为反气旋的高压中心. 分析它们的形成和迁移在大气环流分析和天气预报中有重要作用. 在气象学上通常把上述高空风称为地转风.

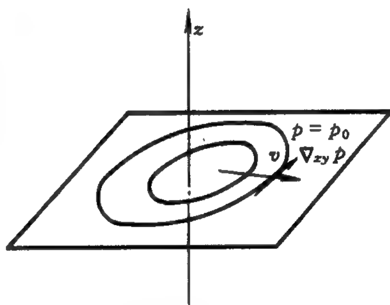


图 5.30　地转风

(三) 粘性流体的情况

流体所受体力若无势，或流体是非正压的，将使涡旋在运动过程中发生变化，涡旋可能产生、发展、扩散和衰减. 现在就流体的粘性对涡变化的影响进行讨论.

设流体是不可压缩和有粘性的，运动粘度系数 ν 为常数，同时体力有势. 则涡量方程(5.1.12)简化为

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} + \nu\Delta\boldsymbol{\omega}. \tag{5.4.15}$$

下面讨论几个具体的例子.

例 5.6　直涡线在粘性流体中的扩散和衰减　奥森涡

在无界粘性流体中存在一个强度为 Γ_0 的无限长直线涡管，引起流体的流动. 通常可以用旋转的无限长细柱体来供给涡源，使流动维持下去. 可以证明这样的流动是无旋的. 假定自某个时刻(如 $t=0$)起外加涡源突然中断，从而使流场的流动发生了变化，涡旋就将逐步扩散并衰减.

由于流场无穷大,涡管很细,并且不考虑涡管内的流动,因此常常可把它看成是一根涡线,在平面截面上则可以看成是一个点涡. 根据条件,这是二维平面流动,涡矢量是

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{k}.$$

由平面对称流动的特性还可以确定

$$(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} = 0,$$

$$(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = 0,$$

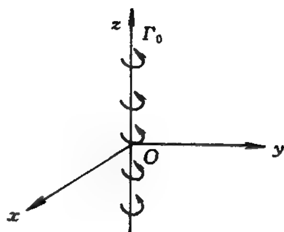


图 5.31 直涡线

于是方程(5.4.15)成为

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \Delta \omega = \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \omega}{\partial r}\right), \tag{5.4.16}$$

初始条件是

$$t=0, \quad r>0:\ \omega=0, \tag{5.4.17}$$

边界条件是

$$t \geqslant 0, \quad r \to \infty:\ \omega=0. \tag{5.4.18}$$

此外还应有在 $t=0$ 时,绕包含该涡线的任一封闭曲线的速度环量 $\Gamma=\Gamma_0$.

方程(5.4.16)是个抛物型方程,在初边值条件(5.4.17)、(5.4.18)下,有解

$$\omega = \frac{A}{t}\exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right). \tag{5.4.19}$$

现在来定常数 A. 在 t 时刻半径为 r 的圆周上速度环量为 Γ,

$$\Gamma = \oint \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint \omega \mathrm{d}S = \int_0^r \omega 2\pi r \mathrm{d}r = 4\pi \nu A\left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right)\right].$$

由于 $t=0$ 时 $\Gamma=\Gamma_0$,可求出常数 A,

$$A = \frac{\Gamma_0}{4\pi\nu},$$

于是涡量分布是

$$\omega = \frac{\Gamma_0}{4\pi\nu t}\exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right). \tag{5.4.20}$$

速度分布则是 $\boldsymbol{v} = v_\theta \boldsymbol{e}_\theta$,

$$v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} = \frac{\Gamma_0}{2\pi r}\left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right)\right]. \tag{5.4.21}$$

图 5.32 中绘出了涡量 ω 随时间 t 变化的曲线,图 5.33 绘出了速度 v 随半径变化的曲线. 可以看到:

在初时刻 $t=0$ 时,流场中各处($r>0$)的涡量为零,即流场是无旋的.

在任意时刻 $t>0$ 时,流场立即产生旋涡,涡量随 r 的增大而逐渐减小;当 r 趋于无限时,涡量趋于零.

在任意距离 $r>0$ 处，在 $t>0$ 的任意时刻流场中都存在旋涡，涡量先增加，然后很快减小，直到 t 趋于无穷大时为零.

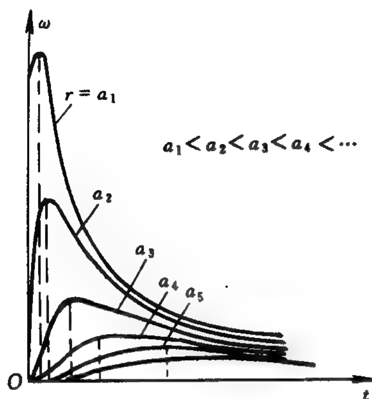


图 5.32　涡量随时间变化曲线

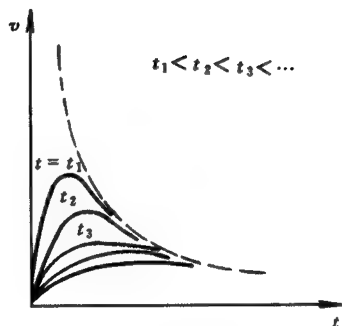


图 5.33　速度随距离变化曲线

本例情况是 C.W.奥森于 1912 年提出的，所以称为奥森涡，也称为兰姆涡. 从速度分布(5.4.21)式可见，当 $r\to 0$ 时，$v_\theta \sim \dfrac{\Gamma_0}{8\pi\nu t}r$，似乎是固体在旋转，但其"边界"$r_0$ 是随时间变化的. 设"边界"r_0 处速度 v_{θ_0}，则 $v_{\theta_0} \sim \dfrac{\Gamma_0}{8\pi\nu t}r_0$. 由于 $\Gamma_0 = 2\pi r_0 v_{\theta_0}$，可求得 $r_0 \sim \sqrt{4\nu t}$. 因此奥森涡提供了一个非定常的外部流动和具有尺度度量为$\sqrt{4\nu t}$的固状涡核的过渡.

例 5.7　平板在粘性流体中启动引起的涡量扩散.

在粘性不可压缩流体中有一块很大的平板，原来是静止的，从某一时刻起，平板突然启动以匀速 U_0 在自身平面内运动，从而带动周围的流体运动. 我们知道，粘性流动有一个重要的性质：流体质点粘附在刚壁上和刚壁一起运动. 在开始时刻，平板上的流体质点已以 U_0 运动，而附近质点尚未运动，因此在近平板的薄层流体中产生了速度梯度，形成了涡旋层. 稍后，由于粘性作用，稍远的流体质点也将运动，速度梯度层亦即涡层将扩散. 这个过程继续下去，涡旋就将扩散到全流场.

设平板沿 x 轴安置，这是一个平面问题，$\boldsymbol{v} = u(y,t)\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{\omega} = \omega(y,t)\boldsymbol{k}$，涡量方程(5.4.15)有如下形式

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}. \tag{5.4.22}$$

初边值条件可以这样来考虑：初时刻 $t=0$，板以速度 U_0 运动，但流体尚处于静

止状态,所以板面上速度梯度无穷大,即涡量无穷大;随时间推延,由于粘性作用流体逐层被带动,直到 t 趋于无穷大时整个流场的流体与平板一起以 U_0 运动,涡量为零值.

为了使这个问题看得更加清楚些,不妨把速度场求解出来. 速度场所满足的方程及初边值条件是

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{5.4.23}$$

$$t = 0 \text{ 时}, \quad u = 0, \tag{5.4.24}$$

$$t > 0 \text{ 时}, \quad \text{在} \quad y = 0, \quad u = U_0, \tag{5.4.25}$$

$$\text{在} \quad y \to \infty, \quad u = 0. \tag{5.4.26}$$

引进无量纲自变量 η 和无量纲速度 u^*,

$$\eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}, \tag{5.4.27}$$

$$u^* = \frac{u}{U_0} = f(\eta), \tag{5.4.28}$$

(5.4.23)成为

$$f'' + 2\eta f' = 0, \tag{5.4.29}$$

定解条件成为

$$f(0) = 1, \quad f(\infty) = 0, \tag{5.4.30}$$

方程(5.4.29)有解

$$\frac{u}{U_0} = u^* = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta. \tag{5.4.31}$$

图 5.34 画出了无量纲速度的曲线. 由上式可求得涡量 ω,

$$\omega = -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{U_0}{\sqrt{\pi \nu t}} e^{-\frac{y^2}{4\nu t}}.$$

从(5.4.31)可看到速度随 y 是递减的. 在流场内划出一条线,在这条线上 $\frac{u}{U_0} = 0.01$. 在这条线的下侧(平板一边),$\frac{u}{U_0} > 0.01$,流体受粘性影响运动,此区域内存在涡量. 在这条线的上侧,$\frac{u}{U_0} < 0.01$,可以认为流体几乎尚未受影响而处于静止状态. 现在来看一下这条线是如何向外运动,即涡旋区是如何扩散的.

由(5.4.31)求出对应于这条线的 η 值是 2,记相应的 y 值为 δ,由(5.4.27)式求得 δ,

$$\delta = 4\sqrt{\nu t}. \tag{5.4.32}$$

这反映了所划出的那条线是随时间而向外推进的,即涡旋区是扩散的,扩散的速

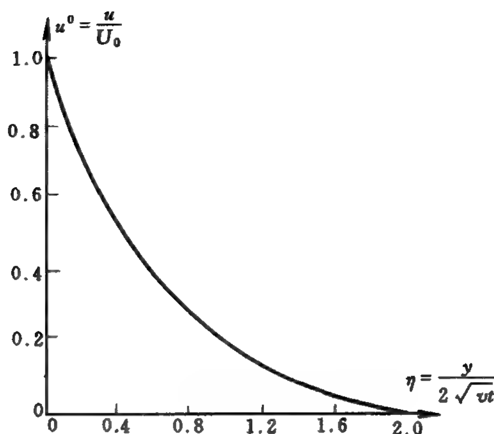


图 5.34　平板突然起动问题的速度分布曲线

度是

$$\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}t}=2\sqrt{\frac{\nu}{t}}. \tag{5.4.33}$$

在开始时，扩散极快，随后逐渐减慢.

我们稍稍改变一下看法，再来考察涡旋扩散的问题. 设想速度为 U_0 的均匀来流流过无穷大平板上方，这恰恰是在上面所述的问题中建立固连在平板上的运动坐标来考察相对运动的情况. 现在回到所述问题，涡量扩散规律不会改变，均匀来流流过距离 l 所需时间为

$$T=\frac{l}{U_0}, \tag{5.4.34}$$

此时涡扩散距离由(5.4.32)式求得是

$$\delta = 4\sqrt{\nu T} = 4\sqrt{\nu\frac{l}{U_0}}, \tag{5.4.35}$$

因而

$$\frac{\delta}{l} = 4\sqrt{\frac{\nu}{U_0 l}} = \frac{4}{\sqrt{Re}}, \tag{5.4.36}$$

式中

$$Re=\frac{U_0 l}{\nu}.$$

这说明涡扩散距离与质点流过距离之比具有$\frac{1}{\sqrt{Re}}$的量级. 如果来流速度很大以致 $Re\gg 1$ 时，有 $\delta\ll l$，这说明涡量主要集中在离板面很近的距离之内. 实验

结果证实了这一点,这在以后讨论边界层流动时十分重要. *Re* 称为雷诺数,在下面 8.2 节中将看到,这是表征流体惯性力与粘性力相对重要性的重要无量纲参数.

涡量是由流场内一点流体质点的角速度所定义的,流体涡旋是怎样产生的?即流体是怎样获得角动量的? 又是怎样输运的呢? 设想一个完全静止的流场,其涡量自然为零. 在流体中有一个物体突然运动,流体就受到了扰动,这个扰动将在流体中扩散开去. 扰动之一是压力冲量,在流体中它将以声速传播,对于不可压缩流体声速为无穷大(在可压缩流体运动一章中将详细讨论声速这个概念),因而压力冲量瞬间传播. 另一方面,物体的突然运动,由于粘性作用,在物面上流体产生了剪切运动,即产生了涡量. 涡量同样将在流体中输运,但远比压力冲量的传播要慢. 图 5.35 描绘了流体质点涡量产生的过程,大致是这样的:由于粘性作用,流体质点沿壁面无相对滑移,但是可滚动,就如同轴承中的滚珠或滚柱一样. 图中的圆柱显示为质点的旋转,其半径标记了其涡量的大小. 在壁面上剪切越强,所产生的涡量也就越强. 一旦在物面上产生了涡量,则通过扩散和对流散布到流场其余地方.

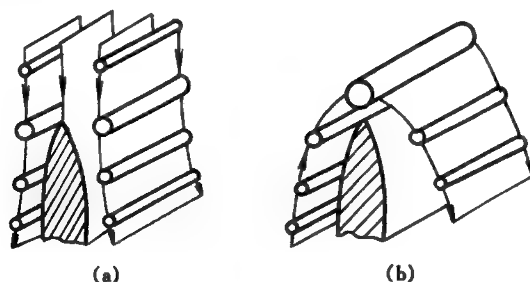


图 5.35 流体质点涡量产生示意图

无论是层流还是湍流,由于粘性而使物面边界所产生的边界层(涡层)中,如外流由于压强在流动方向降落而加速,则边界层中的流动也将受运动方向冲量的作用,流体将沿物面前进,反之,如压强在流动方向是增加的话,外流受到阻滞,边界层内本来较近的流动更将受阻滞,在一定条件下当动能消耗完后就被迫折回,愈来愈多被阻滞的流体在边界层和外流间积聚,逆流向外扩展,流动"分离". 这样产生的分离层迅速形成一个或多个涡. 这样的涡可以滞留在物体后部,也可能因流动雷诺数超过一定值而脱离冲向下游. 请参阅照片 9.2.

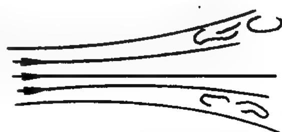


图 5.36 扩张管内出现的逆流现象

这样一种情况,也发生在管道、水渠内. 例如,在截面沿流动方向减小、速度

增大的地方，流体在截面内均匀分布；而在截面沿流动方向增大、速度减慢的地方，易形成逆流，并引起各种不规则流动现象(图 5.36). 同样的情况也会在管道转弯处发生，而且更复杂.

还有一类涡生成的情况. 如图 5.37 所示，流体流过一尖缘物体时形成了速度间断面，这同样是由于粘性作用所导致的. 并且由于往下游速度减慢而出现分离形成涡旋，继续向前，间断面将破碎，涡脱离冲向下游. 图 5.38 显示当风吹过建筑物时，在建筑物的背后部位将出现涡旋，就是属于这一类现象.



图 5.37　绕流尖缘物体时涡的生成及破碎

V.G.詹森在 1959 年对圆球绕流问题求出了涡量输运方程的解. 涡量输运方程是

$$\frac{D\omega}{Dt}=\nu\nabla^2\omega.$$

引入流函数 ψ 后成为

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial y}=\nu\nabla^4\psi.$$

詹森数值求解此方程，所得的结果由图 5.39 显示出来.



图 5.38　风吹过建筑物在背风处形成涡旋

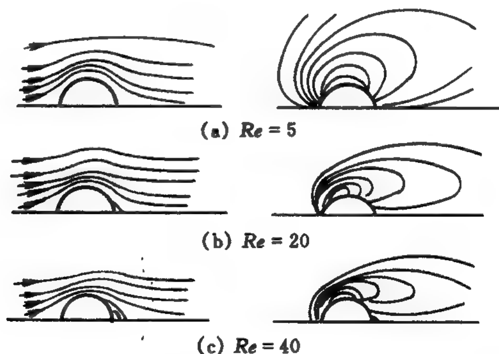


图 5.39　圆球绕流的流动图像及等涡线(詹森 1959 数值计算结果)

1991 年，P.贾斯特森做了类似詹森的数值计算和实验，但在非定常流动条件下进行. 图 5.40 显示流体绕圆柱流动在不同启动时刻所形成的涡旋，数值计算和实验吻合得相当好(引自参考文献[10]).

流体粘性所产生涡的现象普遍存在，涡的产生、发展及破碎是一个非常复杂

的过程,要求出其解析解在目前是十分困难的,迄今做的工作大部分是实验结果和在一定流动条件下的数值计算.

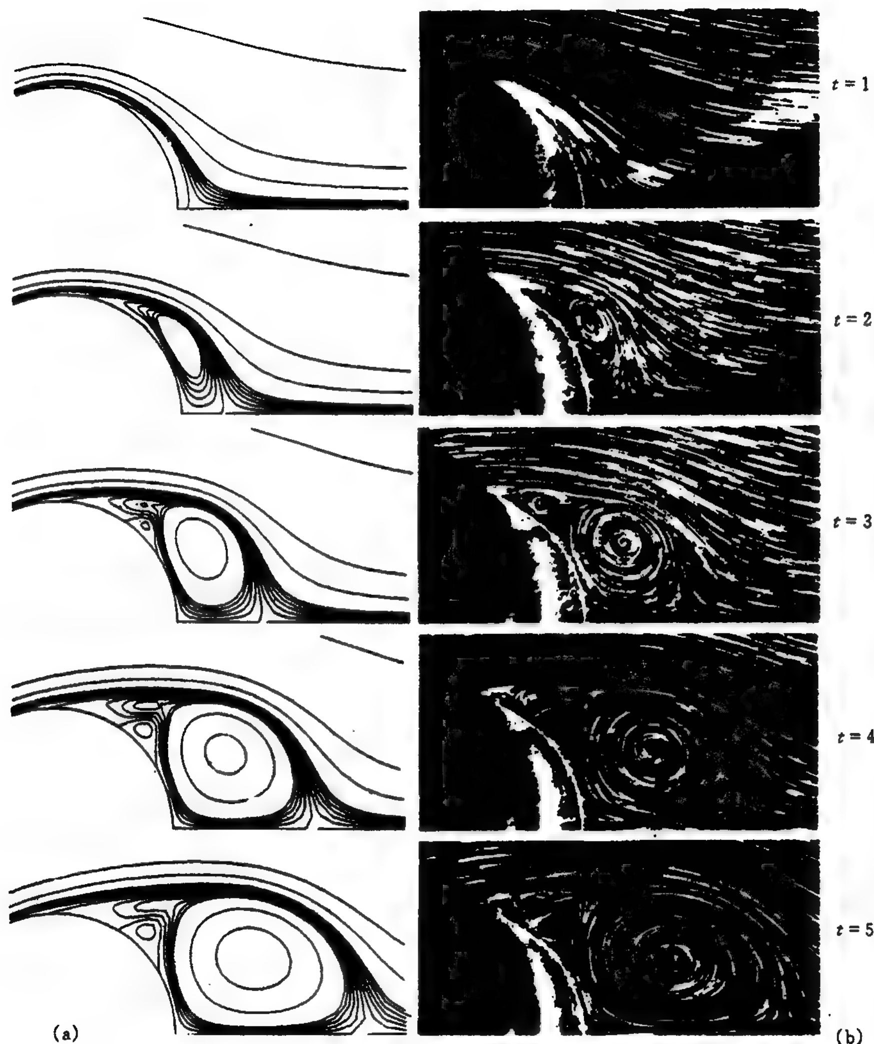


图 5.40 在不同启动时刻流体绕圆柱的流动,$Re = 3\,000$ (a) 数值模拟; (b) 实验

图 5.41 是 E.O. 麦卡格诺对突然扩张直圆管中所形成的涡的数值计算和实验结果(引自参考文献[11]),流动是定常的,实验的雷诺数和数值计算的雷诺数略有不同,但相差很小. 可以看到在突然扩张的角上形成了涡旋.

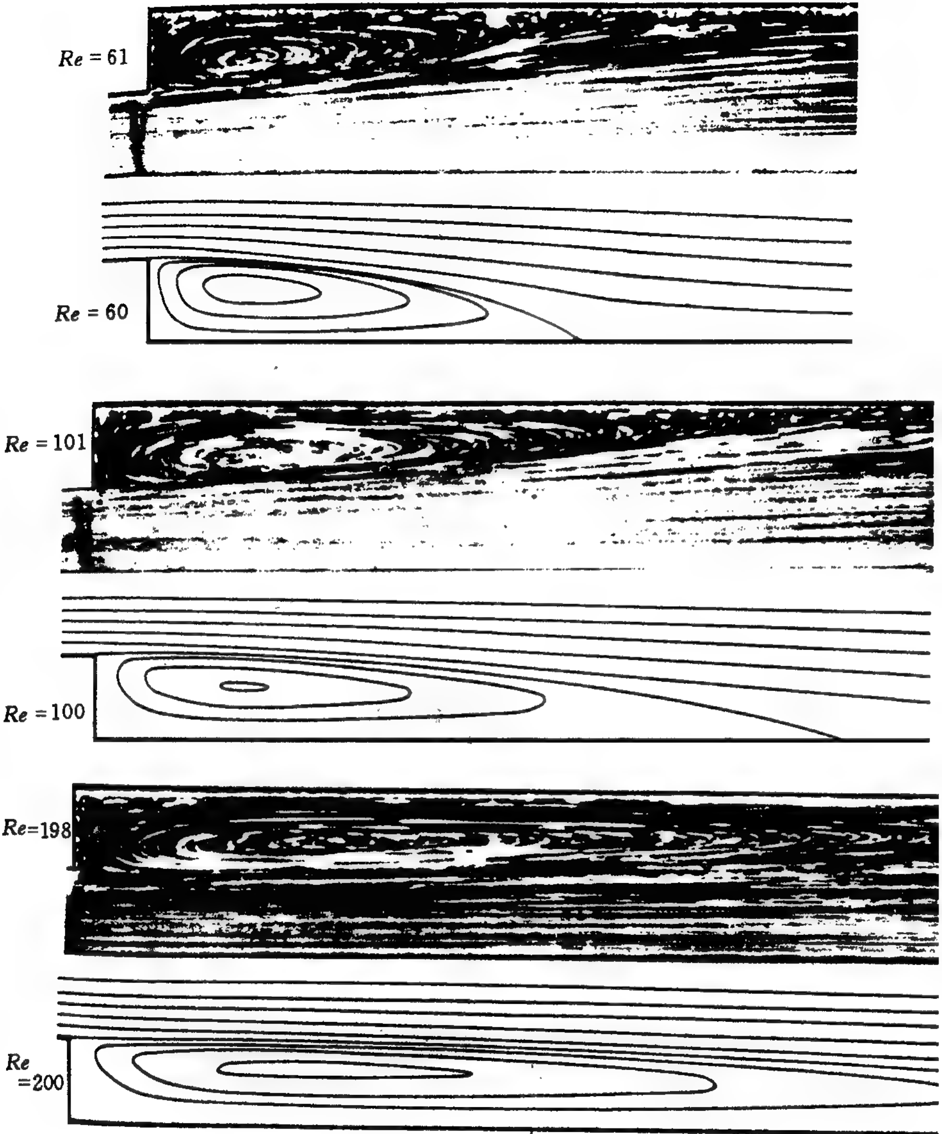


图 5.41　突然扩张直圆管内定常流形成的涡旋. 管径扩张比为 2

小　结

本章简单介绍了流体涡旋运动的基本概念和运动性质，导出了涡旋所感生

的流体运动公式,讨论了涡旋产生的原因.

涡量是流体质点旋转快慢程度的度量,涡量的输运在数学上由涡量输运方程表示. 在粘性流体中,涡旋的扩散有特别的意义.

无粘正压流体在体力有势条件下的运动是一种理想运动状态,在这种运动状态下,涡旋具有保持性,不仅涡线、涡面和涡管是保持的,而且涡管强度也是保持的. 这些性质以开尔文定理和亥姆霍兹定理表示出来.

涡旋的存在使流场诱导产生速度场. 对于线涡,其诱导速度是比奥 - 萨瓦尔公式. 本章着重讨论了涡对、卡门涡街和兰金组合涡,它们在涡旋研究中占有重要地位,长期受到重视.

涡旋产生的原因很多,也十分复杂. 本章简单讨论了流体非正压性、体力无势和粘性这三个因素对涡产生的影响.

由于涡旋运动的复杂性和重要性,这方面的研究已做了很多,但仍有许多问题等待认识,还有大量工作要做,本章对此仅仅是初步的介绍.

* 实验中的发现

(八) 二次流

二次流是指在主流动区域内所出现的一种与主流性质不同的从属流动,它的产生原因很多,表现也比较复杂,例如圆形开口容器与弯曲通道中的流动,非圆形横截面直管道的湍流流动和固体在流体中作振荡运动时均可能产生二次流动,它们分别称为第一、第二和第三类二次流,这里仅介绍一些与第一类有关的情况.

大约公元前 460 年前后,希腊哲学家与政治家恩贝多克利(492—432B.C.)在观察自然界的旋风和搅动圆形容器中的液体使其沿固壁转动时,发现在过中心轴的横截面上出现一对称环流,如图 5.42(a)所示,如果液体中含有沙粒或茶叶等固体物质,只要它们的重量超过自身的浮力,这些物质就会迁移至底部中心并积存在那里,这一现象现称为“茶杯现象”,当时他片面地认为这是由于液体在固壁上粘附作用引起的.

1857 年,J. 汤姆森对这一现象进行了专门研究. 1876—1877 年他又研究了一些与此类似的流动,如流体在弯曲河道与管道中的流动,并用实验证明了他的解释,1868 年,J. V. 布辛涅斯克也研究了摩擦阻力对这类流动的影响,他们均认为摩擦阻力会使流动产生横向速度分量从而改变流场的速度分布,同时也认为为了保持流体运动必须在径向有一压强梯度以平衡流体的离心力,即需满足关系式

$$\frac{U^2}{r}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r},$$

其中 ρ 与 p 分别为流体的密度与压强，r 为流体微元至曲率中心的径向距离和 U 为流体微元在流线上的切向速度，这样侧壁附近的压强必较中心处的为大. 如果假定运动时沿任一垂直线上的压强分布遵循静压强分布规律则上式变为

$$\frac{U^2}{gr}=\frac{\partial d}{\partial r}, \tag{1}$$

其中 d 为流体微元至界面的深度，用同样的假定可将能量方程写为

$$d+\frac{U^2}{2g}=\text{常数}. \tag{2}$$

对 r 微分此式，并利用(1)式有

$$\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{U}{r}=0. \tag{3}$$

积分此式有

$$Ur=\text{常数}.$$

它表明：流动为一自由涡，中心处的速度最高，压强最低，很显然，底面附近的压强较液面附近的为高，这样，在底面附近，流体就有从侧壁流向中心，再沿中心轴附近从底面向上流向液面的趋势.

从(2)式可以看出，底面附近的速度 U 远较液面附近的为低，即前者的离心力较后者为小. 同时，自由液面为一常压面，在它与附壁层和较大离心力的共同作用下，液面下方的高速流体将不断地从中心流向侧壁，再沿侧壁往下将侧壁附壁层内运动缓慢的流体驱走. 自己的速度也迅速下降，并在侧壁附壁层作缓慢运动，这样，就形成了如图 5.42(a)所示的二次环流. 如果将主流与环流相叠加则底面附近的流动如图 5.42(b)所示.

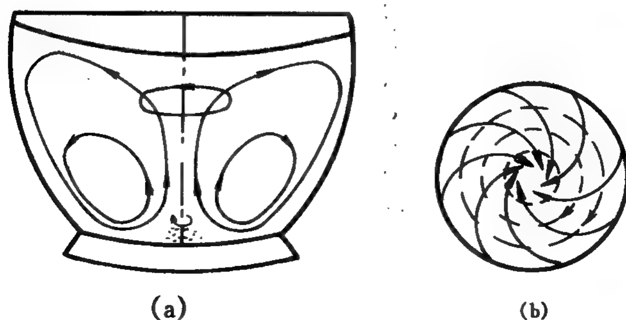


图 5.42

几乎与恩贝多克利同时,我国春秋末战国初(约 475 年 B.C.)所编著的《考工记·匠人》一书中,就有人们对于弯曲水流认识的记载如“欲为渊,则句为矩”,郑玄注释为水“太曲则流转,流转则其下成渊”.清人程瑶田则简单地解释为,在弯曲的水流中,由于离心力的作用,水体的重心将略为向上与向外移动,使河流凹岸的水位增高,凸岸的水位下降,即在河床的横截面上形成水位差,使下层含粗沙的水流由凹岸流向凸岸并转而向上,上层含细沙的水流由凸岸流向凹岸并转而向下形成横向环流.随之河床底面的沙石亦将由凹岸移向凸岸一侧.更令人吃惊的是这一原理早在许多著名的灌溉工程中加以应用,如公元前 246 年韩国水工郑国为秦国设计引泾入洛的郑国渠,渠首取在泾水凹岸稍偏下游的地方,这是非常科学的,因为在水流上层,纵向流速与横向流速的合速度是指向凹岸稍偏下游的,而且河流的最大速度也在上层,这样可使进入渠道的水量最大,同时带入大量细泥,进行“淤灌”,而下层水流的合速度指向凸岸偏下游的地方,使一切粗沙石积沉在那里,免得进入渠道后造成堵塞.又如公元前 251 年,由李冰主持建造的都江堰灌溉工程,它由鱼咀,飞沙堰和宝瓶口三部分组成.岷江从西北方向来,鱼咀将其分为内江与外江,并由此转向正南,飞沙堰位于内江西侧凸岸,上层水流的合速度指向东南方向,正对宝瓶口以便取水,而下层水流的合速度指向西南方向,正对飞沙堰及排沙渠道,这样就实现了“正面取水,侧面排沙”的目标.再如隋代(581—618A.D.)宇文恺在治理位于洛阳南方的洛水时,将原为由西向东直流的洛水,改为在洛阳东南转向东北流,并在转弯处采用偃月形河道,使洛阳位于洛水凸岸一侧,以增加安全.

习 题

5.1 求下列流场的涡量场和涡线:

(1) $\boldsymbol{v} = xyz\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$;

(2) $u = y + 2z$, $v = z + 2x$, $w = x + 2y$.

5.2 已知平面流动速度分布是

$$v_\theta = \frac{\Gamma_0}{2\pi r}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\right),\quad v_r = 0,$$

其中 Γ_0, ν 是常数.求:

(1) 涡量场;(2) 任周线 $r = R$ 的速度环量 Γ;(3) 通过全平面的涡通量.

5.3 已知流场速度分布是

$$u = \frac{-cy}{x^2 + y^2}, v = \frac{cx}{x^2 + y^2}, w = 0,$$

c 是常数.

(1) 用速度环量说明流动是否有旋;

(2) 作一围绕 z 轴的任意封闭曲线,求沿该曲线速度环量.

5.4　证明由以下速度场

$$u=-ky,\quad v=kx,\quad w=\sqrt{c-2k^2(x^2+y^2)}$$

所确定的运动中,涡矢量与速度矢量方向相同,并求涡量和速度间关系. 上式中 k,c 为常数.

*5.5　对涡通量 $J=\iint \boldsymbol{\omega}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$,说明影响 $\dfrac{\mathrm{D}J}{\mathrm{D}t}$ 的因素.

5.6　已知流体通过漏斗时旋转的速度分量是,

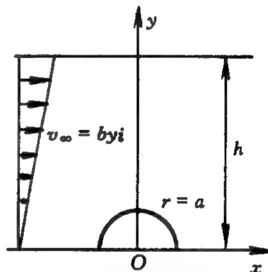
$$\text{在 } 0\leqslant r\leqslant a:\ v_r=0,\quad v_\theta=\frac{1}{2}\Omega r,\quad v_z=0,$$

$$\text{在 } r\geqslant a:\ v_r=0,\quad v_\theta=\frac{1}{2}\Omega\frac{a^2}{r},\quad v_z=0,$$

式中 Ω 为旋转角速度,是一常数. 试求涡量并判断有旋及无旋区域.

5.7　在平面环形区域 $a_1<r<a_2$ 中涡量等于一常数,而在 $r<a_1,r>a_2$ 区域中流体静止. 设 $r=a_1,r=a_2$ 是流线,在 $r=a_1$ 上流体速度是 $U_0,r=a_2$ 上流体速度趋于零. 求环形区域内涡量值.

*5.8　在一平面渠道内放有一半径为 a 的半柱体. 已知涡量场 $\boldsymbol{\omega}=-b\boldsymbol{k}$,无穷远来流 $\boldsymbol{v}_\infty=by\boldsymbol{i}$,流体为不可压缩,式中 b 是常数. 试将问题归结为给定旋度的不可压缩流动问题和无旋的不可压缩流动问题的叠加,给出对应的边界条件.



5.8 题图

5.9　不可压缩流体的平面运动速度已知是

$$u=4t-\frac{4(y-2)}{(x-1)^2+(y-2)^2},\quad v=\frac{4(x-1)}{(x-1)^2+(y-2)^2}.$$

(1) 速度场可由哪两个简单流动叠加构成;

(2) 求圆心在原点半径为 3 的圆周上的速度环量.

*5.10　对于以常角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ 旋转同时以常速度 $\boldsymbol{V}_0$ 平移的运动坐标系,若无粘不可压缩流体质量力有势,证明涡量方程在此运动坐标系中有如下形式,

$$\frac{\partial'\boldsymbol{\omega}}{\partial t}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{\omega}+\left(\frac{\mathrm{D}'\boldsymbol{r}'}{\mathrm{D}t}\cdot\nabla'\right)\boldsymbol{\omega}=(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$$

式中“′”表示在运动坐标系中求导,$\dfrac{\mathrm{D}'\boldsymbol{r}'}{\mathrm{D}t}=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{V}_0-\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}'$,$\boldsymbol{r}'$ 是运动坐标系中矢径,$\boldsymbol{V}$ 是绝对速度.

5.11　无粘性不可压缩的均质流体在质量力有势条件下作平面运动,证明

$$\frac{\partial\omega^2}{\partial t}+\nabla\cdot(\omega^2\boldsymbol{v})=0.$$

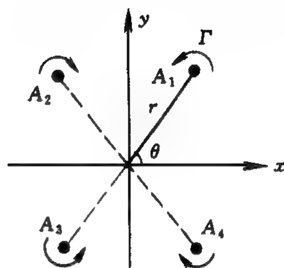
*5.12　无粘性正压流体在质量力有势条件下作平面定常运动,证明若涡量 ω 是常数,则有

$$\frac{v^2}{2}+\Pi+P+\omega\psi=\text{常数}.$$

式中 ψ 称为流函数,其定义是 $u=\frac{\partial\psi}{\partial y}, v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$.

5.13　无粘性不可压缩流体的平面运动中,若质量力有势,流体正压,则沿质点运动轨迹有 $\frac{\mathrm{D}\omega}{\mathrm{D}t}=0$.

5.14　如图放置 4 个与 z 轴平行的无限直线涡:在 $A_1(r,\theta)$处强度是 Γ,在 $A_2(r,\pi-\theta)$处强度是 $-\Gamma$,在 $A_3(r,\pi+\theta)$处强度是 Γ,在 $A_0(r,2\pi-\theta)$处强度是 $-\Gamma$. 求 A_1 处涡运动的轨迹.



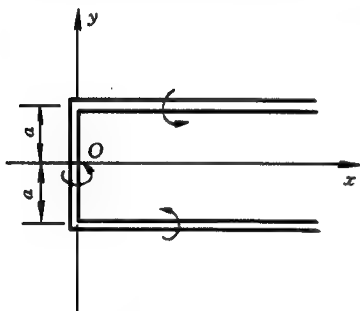
5.14 题图

5.15　证明涡对的下述性质:

(1) 如两个点涡旋转方向相同,则涡旋惯性中心位于两点涡联线上近强点涡的一侧;

(2) 如两个点涡旋转方向相反,则涡旋惯性中心位于两点涡联线的延长线上近强点涡的一侧;

(3) 如两个点涡旋转方向相反且强度相同,则涡旋惯性中心在无穷远处,其转动角速度为零.

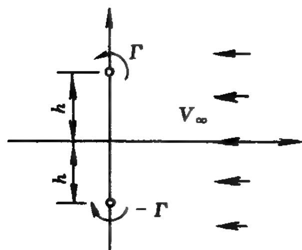


5.16 题图

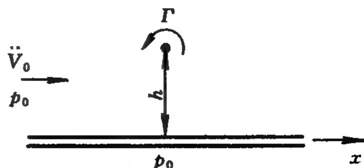
5.16　在原静止的不可压缩无界流场中,在 $z=0$ 平面上放置一强度为 Γ 的 Π 形涡线. 求 $z=0$ 平面上 Π 形涡线所围区域的速度场.

5.17　不可压无界流场中有一对强度为 Γ 的直线涡,方向相反,分别放在$(0,h)$与$(0,-h)$点上,无穷处有一股均匀来流 V_∞ 使这两个涡线停留不动,求 V_∞ 及对应的流线方程.

5.18　无粘性不可压的流体中沿 x 轴放置一无限长平板,其上方 h 处有一强度为 Γ 的直线涡,在无穷处有一压强为 p_0 速度为 V_0 且与平板平行的均匀来流. 若平板下背面所受压强为 p_0,求单位长平板上所受总的力.



5.17 题图



5.18 题图

*5.19　求重力作用下上界面接触静止大气的兰金组合涡的自由面形状.

*5.20　例 5.6 奥森涡,设想一个中心在 z 轴的圆向外膨胀以致它包围的涡通量不变,确定圆的面积随时间的变化规律 $S(t)$.

第六章　无粘性不可压缩流体的无旋运动

无粘性不可压缩流体的无旋运动是流体力学中一种理想化的简单模型，它可以给出许多有用的结果，并为研究更复杂的流动现象奠定基础．本章着重讨论了两类这样的无旋运动，一类是平面无旋运动，另一类是空间轴对称无旋运动．根据基本方程组(6.1)，对于这两类无旋运动既可用速度势函数进行讨论，也可以同时引进流函数加以讨论(6.2)．

平面无旋运动是本章讲解的重点．由于这种流动的特点，引进了复势函数(6.3)，在导出柱体受力复势表示(6.4)之后，介绍了三种求复势函数的方法：奇点叠加法(6.5)、镜像法(6.6)和共形映射法(6.7)．对于空间轴对称运动，主要介绍了奇点迭加法(6.8)．最后，简单介绍了非定常绕流问题．

几个重要的物理现象和物理概念也将在本章介绍，如达朗伯佯谬、儒可夫斯基假定，附加质量等．对它们的讨论将有助于加深了解流体力学的某些基本规律．

6.1　无粘性不可压缩流体无旋运动的基本方程组

描述流体质点运动的亥姆霍兹定律说明流体质点的运动由平动、变形和旋转三种形式构成．质点的旋转用旋度或涡量来描记，如果在所讨论的流动区域内流体的旋度不为零，就说在此区域内流动有旋；如旋度为零，就说在此区域内流动无旋．在第五章中，已对流体涡旋的几何描述、涡旋的性质和在一定条件下涡旋的产生及扩散等作了讨论．这一章将讨论无粘性不可压缩流体的无旋运动．在开始讨论之前先说明一下这类运动的实际意义及适用范围．

真实流体是有粘性的，在流动过程中粘性力对流动起一定的作用．对于绕

物体(如飞机、火车、水下船只和建筑物外部)的流动,比较纳维－斯托克斯方程各项量级可以看到,惯性力与粘性力之比和流体的粘度成反比,和来流速度及物体的特征尺度成正比.水和空气的粘度系数分别是$1.0\times10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$和$1.5\times10^{-5}\text{m}^2/\text{s}$,只需几厘米大小的物体以每秒几厘米的速度运动就可使这个比值达中等大小,因而对所列举的几种绕流而言,惯性力和粘性力比值相当高,即粘性效应相对惯性效应来说属于次要因素,可以利用此点使问题简化.实际上,实验已表明,流体绕过物体时,在物体表面形成很薄一层区域,在那里流体强烈有旋,粘性效应显著,而在此薄层之外的大部分区域内可以忽略不计粘性.因此在研究不脱体绕流的压强分布且不研究阻力时,就可把流体作为无粘性的来处理.实际上惯性力和粘性力成高比值的现象要比低比值的现象普遍得多,因此无粘性的简化模型是有一定意义的.另一方面,在通常条件下液体和低速气体的运动,压缩性影响可以忽略,这又使得我们可以把流体近似地看作是不可压缩的.

涡保持性的拉格朗日定理指出,在一定条件下的无粘性流体,如果在初始时刻没有涡量的话,以后也就永远不能获得涡量.所以对无穷远处均匀来流的定常绕流以及从静止起动的非定常运动这一类问题都可以用无旋运动的模型来处理.

通过上面讨论可以清楚地看到,无粘性不可压缩流体的无旋运动是真实流体运动在一定条件下的一种简化,对它的研究具有重要的实际意义.

(一) 无粘性不可压缩流体无旋运动的速度势函数及基本方程组

无粘性不可压缩流体运动应满足的基本方程组和边界条件是

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0,$$

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}=\boldsymbol{F}_{\mathrm{b}}-\frac{1}{\rho}\nabla p,$$

在$t=t_0$时,

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0,\qquad p=p_0,$$

在固壁上,

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}|_{\mathrm{w}}=\boldsymbol{v}_{\mathrm{w}}\cdot\boldsymbol{n}.$$

此外,如存在自由面,应加上自由面条件;如是无界区域,应加上无穷远处的条件;如是管流一类的运动,则还应加上进出口条件.

这是一组最简单的流体运动方程组,但由于它是非线性的,而且速度和压强又耦合在一起,要求它的一般解是困难的.只有在某些特殊流动条件下,非线性项自动消失或者存在首次积分时,才能有解.

如果在所讨论的流动区域内,流体的运动是无旋的,即$\operatorname{rot}\boldsymbol{v}=0$,则必定存在一个势函数$\varphi(x,y,z;t)$使得

$$\boldsymbol{v}=\nabla\varphi.\tag{6.1.1}$$

通常称势函数 $\varphi(x,y,z;t)$ 为速度势，因而也常常称无旋流动为势流．将(6.1.1)式代入不可压流体运动的连续性方程后就得到

$$\nabla^2\varphi=0 \tag{6.1.2}$$

这是拉普拉斯方程，在给定的边界条件下可以求解．问题现在变得简单多了．首先，拉普拉斯方程是线性的，在数学上已经有了一些成熟的解法；其次，原来在基本方程组中速度和压强是耦合的，现已转化为只需解速度势就可以了，成了一个纯粹的运动学问题．在求得速度势和流动速度后，代入运动方程就可求出压强 p 来．对于正压流体和体力有势的情况，当流动无旋时，存在着拉格朗日积分

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{v^2}{2}+P+\Pi=c(t), \tag{6.1.3}$$

式中 P 是压强函数，Π 是体力势．压强函数 P 就可以由这一式算出．在本章中，研究密度不变的流体，并假定体力是重力，因此 $P=\frac{p}{\rho}$，$\Pi=gz$，计算压强 p 就是十分容易的．

这样，无粘性不可压缩流体无旋运动的基本方程组和初边值条件是

$$\nabla^2\varphi=0, \tag{6.1.2}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{v^2}{2}+P+\Pi=c(t), \tag{6.1.3}$$

在 $t=t_0$ 时，

$$\nabla\varphi=\boldsymbol{v}_0,\quad p=p_0, \tag{6.1.4}$$

在固壁上，

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{\rm w}=\boldsymbol{v}_{\rm w}\cdot\boldsymbol{n}, \tag{6.1.5}$$

同时还应补充其他边界条件，如自由面条件、无穷远处条件、管道的进出口条件等，视具体的边界而定．

现在我们分析原来静止的流体受到瞬时压力冲量后所产生的流动，如物体突然冲入水中而产生的运动，对速度势函数给出动力学的解释．

将无粘性不可压流体的欧拉方程关于时间从零到瞬时力作用时间 Δt 积分，有

$$\int_0^{\Delta t}\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}\,\mathrm{d}t+\int_0^{\Delta t}(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\Delta t}\boldsymbol{F}_{\rm b}\mathrm{d}t-\frac{1}{\rho}\int_0^{\Delta t}\nabla p\mathrm{d}t.$$

在开始时刻 $t=0$ 时，流体是静止的，

$$\int_0^{\Delta t}\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}\,\mathrm{d}t=\boldsymbol{v},$$

式中右端 $\boldsymbol{v}$ 表示瞬时力消失时流体的运动速度. 而且由于 Δt 极短，可以认为在 Δt 时间内流体质点没有离开原先位置. 这样方程中 $\int_0^{\Delta t}(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t$ 和 $\int_0^{\Delta t}\boldsymbol{F}_b\mathrm{d}t$ 与 Δt 同一量级，当 $\Delta t\to 0$ 时的极限为零，由此得到

$$\boldsymbol{v}=-\frac{1}{\rho}\int_0^{\Delta t}\nabla p\mathrm{d}t=-\nabla\int_0^{\Delta t}\frac{p}{\rho}\,\mathrm{d}t.$$

记瞬时压力冲量为 J，

$$J=\int_0^{\Delta t}p\mathrm{d}t,$$

于是有

$$\boldsymbol{v}=\nabla\left(-\frac{J}{\rho}\right).$$

这就是说，在时刻 Δt 当瞬时力停止作用时，流体开始运动，这样的运动是有势的，存在速度势 φ，为

$$\varphi=-\frac{J}{\rho},$$

这就说明了势函数的力学意义.

例 6.1　无粘性不可压缩流体的均匀来流，绕过一无穷长直圆柱. 已知均匀来流速度 V_∞，圆柱半径 a，流体密度 ρ，不计重力，没有环量，求流场速度及圆柱表面所受压强(图 6.1).

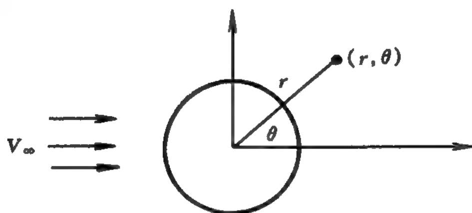


图 6.1　圆柱均匀绕流

解　由已知条件可知，这是一个无旋的二维流动，存在速度势 $\varphi(x,y,z)$. 速度势所满足的拉普拉斯方程和边界条件在柱坐标形式下是

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}=0,$$

在 $r=a$ 处，

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}=0,$$

在无穷远处，

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}=V_\infty\cos\theta.$$

解这个问题最简单的办法是变量分离法，可以设 $\varphi = R(r)\Theta(\theta)$ 求解. 但这样做比较复杂(读者可尝试一下)，在分析边界条件后不妨设 $\varphi = R(r)\cos\theta$，于是方程和边界条件简化成

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) - \frac{1}{r^2}R(r) = 0,$$

在 $r = a$ 处， $R'(r) = 0$,

在无穷远处， $R'(r) = V_\infty$.

上述 $R(r)$ 满足的是欧拉方程，有通解

$$R(r) = c_1 r + c_2 \frac{1}{r},$$

由边界条件可定出常数，

$$c_1 = V_\infty, \quad c_2 = V_\infty a^2,$$

故而

$$R(r) = V_\infty\left(r + \frac{a^2}{r}\right),$$

因此速度势 φ 及速度是

$$\varphi = V_\infty\left(r + \frac{a^2}{r}\right)\cos\theta,$$

$$v_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = V_\infty\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta,$$

$$v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -V_\infty\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta.$$

在圆柱壁上流体速度是

$$v_r\big|_a = 0,$$

$$v_\theta\big|_a = -2V_\infty\sin\theta.$$

圆柱壁上的压强 $p|_a$ 由伯努利方程求得，

$$\frac{V_\infty^2}{2} + \frac{p_\infty}{\rho} = \frac{v^2|_a}{2} + \frac{p|_a}{\rho},$$

所以

$$p|_a = p_\infty + \frac{1}{2}\rho(V_\infty^2 - v^2|_a)$$

$$= p_\infty + \frac{1}{2}\rho V_\infty^2(1 - 4\sin^2\theta).$$

*(二) 速度势函数和无旋运动的某些性质

满足拉普拉斯方程的速度势函数 φ，是一个调和函数，在高等数学中已了解了它的一些性质，因此下面将仅仅列出速度势函数和无旋运动的某些性质.

(1) 在单连通区域内，速度势函数是单值函数，在多连通区域内，速度势函数是多值函数.

(2) 在流场内部，速度势不能达到极大值或极小值.

(3) 速度的极大值只能在流动区域边界上达到.

(4) 在流场内部,压强 p 不能达极小值.

(5) 流体动能的速度势表示

单连通区域. 流场 τ,边界 S,取边界外法线 $\boldsymbol{n}$.

如果这个单连通区域是有界的(如物体在充满流体的大容器内运动),S_1 和 S_2 分别表示内外边界,$\boldsymbol{n}_1$ 和 $\boldsymbol{n}_2$ 分别表示内外边界法向单位矢量(图 6.2),则流体动能为

$$K = \frac{\rho}{2}\oiint_{S_2} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n_2}\mathrm{d}S - \frac{\rho}{2}\oiint_{S_1} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n_1}\mathrm{d}S. \tag{6.1.6}$$

如果这个单连通区域是无界的(如物体在比它的特征尺度大得多的流体域中运动),即可把它看作外边界 S_2 扩张到无穷远的有界单连通区域(图 6.3). 设无穷远处流体速度为零,则流体动能为

$$K = \frac{\rho}{2}cQ - \frac{\rho}{2}\oiint_{S_1} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n_1}\mathrm{d}S \tag{6.1.7}$$

式中 $c = \varphi|_{R\to\infty}$ 是常数,Q 是流体通过面积 S_1 的体积流量.

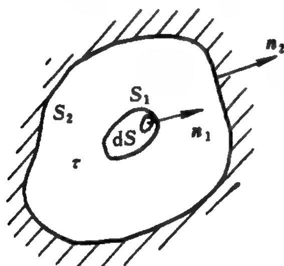


图 6.2　有界单连通区域

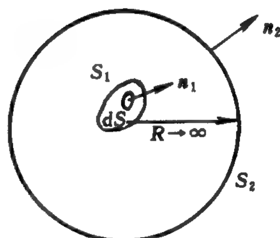


图 6.3　无界单连通区域

双连通区域。

如果这个双连通区域是有界的(如由内外两个柱形边界所围成的流体区域),可作分隔面 S_b 使它成为单连通区域(图 6.4 所示),单位宽区域中流体动能为

$$K = \frac{\rho}{2}\oiint_{S_1+S_2} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\mathrm{d}S + \frac{\rho}{2}\Gamma_0 Q_b, \tag{6.1.8}$$

式中 Γ_0 是绕内边界的速度环量,$\Gamma_0 = \oint_c \boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \varphi_- - \varphi_+$ 为隔面两侧 φ 之差,Q_b 是通过单位宽隔面 S_b 的体积流量.

如果这个双连通区域是无界的,可把它看作是外边界 S_2 扩张到无穷远的有界双连通区域(图 6.5). 设无穷远流体速度为零,则流体动能是

$$K = \frac{\rho}{2}\oiint_{\substack{S_2\\(r\to\infty)}} \tilde{\varphi} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial n_2}\mathrm{d}S - \frac{\rho}{2}\oiint_{S_1} \tilde{\varphi}_1 \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial n_1}\mathrm{d}S$$

$$-\frac{\rho}{2}\oiint_{\substack{S_3\\(r\to 0)}}\tilde{\varphi}\,\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial n_3}\mathrm{d}S+\frac{\rho}{2}\,\Gamma_0 Q_b,\tag{6.1.9}$$

式中 $\tilde{\varphi}=\varphi-\frac{Q}{2\pi}\ln r$，$Q$ 是通过 S_1 面体积流量，S_3 是以零点为中心所作小圆的面积.

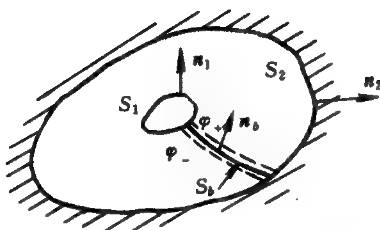


图 6.4 有界双连通区域

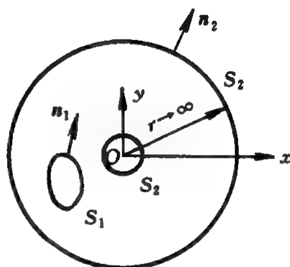


图 6.5 无界双连通区域

最后我们要注意，在推导速度势 φ 所满足的拉普拉斯方程时，仅用到了两个条件：(1)流体的不可压缩性；(2)流动的无旋性，所以可以得出结论：

(1) 对于粘性的不可压缩流体，如果运动是无旋的，那末也存在速度势函数 φ，且同样满足拉普拉斯方程. 但要注意，边界条件发生了变化，和无粘性流体的边界条件是不一样的. 同时，压强已不能简单地由类似(6.1.3)式那样的首次积分来求.

(2) 前面推导过程中，与流动是否定常无关，即使对于非定常运动. 速度势满足同样的拉普拉斯方程，时间 t 在方程中是以参数形式出现的，并且在边界条件中反映出来.

无粘性不可压缩流体的无旋运动，在数学上归结为求速度势 φ 的拉普拉斯方程的纽曼问题. 由于在高等数学中对这样的数学问题有详细讨论，下面不再赘述. 从本章第二节起，我们将讨论无粘性不可压缩流体两类较为简单的无旋运动——平面流动和空间轴对称流动，归结其基本方程，给出它们的解法，分析它们的流动特点.

6.2 平面运动和空间轴对称运动的流函数

无粘性不可压缩流体的无旋运动在数学上归结为速度势函数满足拉普拉斯方程的纽曼问题. 尽管要比欧拉方程容易求解，但在边界比较复杂的情况下，仍然不易处理，因此在这一章中，将主要讨论两类较简单的流动，即平面运动和空

间轴对称运动.

平面运动指这样的一种流动状态:流场中各点流体速度都平行于某一固定平面,并且各物理量在此平面的垂直方向上没有变化. 通常设该平面为 $x-y$ 平面,或在柱坐标系中为 $r-\theta$ 平面,垂直于该平面的某轴为 z 轴. 在这样坐标系中,平面运动的任一物理量与 z 坐标无关,速度的 z 轴方向分量为零,即

$$\frac{\partial}{\partial z}=0, \quad v_z=0.$$

在实际的工程问题和自然现象中,严格意义下的平面运动是不存在的. 但是,当流动的物理量在某一方向上变化比相对应于其它方向上变化要小,并且在该方向上速度分量也很小时,就可以把这样的流动简化为平面流动. 例如低速飞行的机翼,由于通常机翼长度与宽度的比相当大,当我们在讨论离开机翼端点部位的流动时,可以忽略端点影响. 将机翼看成是无限长的,这时垂直于机翼长度方向的各平面上流动基本相同,从而简化为平面运动.

空间轴对称运动指另一类流动状态:在流场中存在着对称轴,所有流体质点都在通过轴线的平面内运动,而且所有这些过轴线的平面内的运动情况都是相同的即

$$\frac{\partial}{\partial \theta}=0, \quad v_\theta=0.$$

在实际问题中,同样会遇到大量的空间轴对称运动,如炮弹在空中直线飞行时,所引起的流体流动,就是一个典型的空间轴对称运动例子.

(一) 不可压缩流体平面运动的流函数

1. 流函数及其性质

不可压缩流体的连续性方程是

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v}=0.$$

如果流体作平面运动,取上面所说的平面为 $x-y$ 平面,则连续性方程写成

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0. \tag{6.2.1}$$

现在引进一个新的标量函数 ψ,使得

$$u=\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v=-\frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{6.2.2}$$

这样连续性方程(6.2.1)就自动满足了,通常称这个标量函数 ψ 为流函数.

在柱坐标系的情况下,平面运动的连续性方程是

$$\frac{\partial r v_r}{\partial r}+\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}=0, \tag{6.2.3}$$

这时定义流函数 ψ 为

$$v_\theta=-\frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad v_r=\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \tag{6.2.4}$$

同样连续方程(6.2.3)也自动满足.

现在以直角坐标系为例,来说明不可压缩流体平面运动流函数所具有的基本性质.

(1) 等流函数线是流线

根据流函数的定义

$$\mathrm{d}\psi=\frac{\partial\psi}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial\psi}{\partial y}\mathrm{d}y=-v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y,$$

在等流函数线上,ψ 为常量,$\mathrm{d}\psi=0$,由上式得到

$$\frac{u}{\mathrm{d}x}=\frac{v}{\mathrm{d}y}.$$

这就是平面运动的流线方程,因此 $\psi=\mathrm{const}$ 表示流线;反之亦然.

(2) 平面内任两点流函数值的差等于通过这两点连线的流量(在 z 方向是单位长度).

在任一非流线的曲线 AB 上取微元 $\mathrm{d}l$,$\boldsymbol{n}$ 是该微元的单位法向矢量(图 6.6). 容易写出过这一微元 $\mathrm{d}l$ 的流体体积流量是

$$\mathrm{d}Q_{\mathrm{V}}=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}l=\left(u\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}l}-v\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l}\right)\mathrm{d}l$$

$$=u\mathrm{d}y-v\mathrm{d}x=\frac{\partial\psi}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial\psi}{\partial x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\psi.$$

因此过该非流线的曲线 AB 的体积流量是

$$Q_{\mathrm{V}}=\int_A^B\mathrm{d}\psi=\psi_B-\psi_A. \tag{6.2.5}$$

性质(1)、(2)两点告诉了我们为什么要把所定义的函数 ψ 称为流函数.

(3) 流函数 ψ 可能是多值函数.

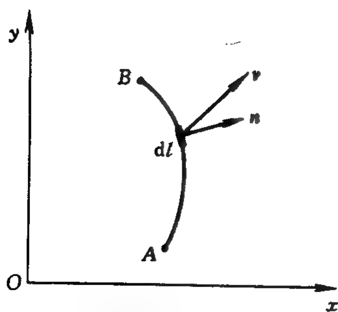


图 6.6　曲线微元及速度矢量

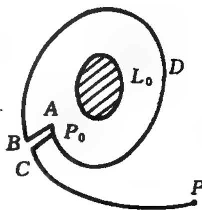


图 6.7　流场中两点的任意联线

对于不可压缩的流体,如果流过内边界 L_0 的总流量 Q_0 不为零,即

$$\oint_{L_0} v \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}l = Q_0 \neq 0,$$

并且所讨论的流场内不存在其它的流体源或汇，那么根据体积流量守恒原理，包围内边界的任一封闭曲线 L 的流量也必然是 Q_0，即

$$\oint_L \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}l = \oint_{L_0} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}l = Q_0.$$

在这种情况下，流函数就将是多值的. 看图 6.7 上两点 P 和 P_0 的流函数之差. 取图示积分路线 P_0DBAP_0CP，由性质(2)，

$$\psi_P - \psi_{P_0} = \oint_{P_0DBAP_0CP} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}l = \oint_{P_0DBAP_0} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}l + \int_{P_0CP} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}l$$

$$= Q_0 + \int_{P_0}^{P} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}l.$$

如果封闭曲线 P_0DBAP_0 是绕内边界 L_0 n 周的，那么

$$\psi_P - \psi_{P_0} = nQ_0 + \int_{P_0}^{P} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}l.$$

这显然说明 ψ 是多值的，它们之间相差 Q_0 的整数倍. 然而尽管流函数可能是多值的，根据定义，流场中速度总是单值的.

(4) 流函数 ψ 的值是速度的矢量势 $\boldsymbol{B}$ 的模

根据不可压缩流体的连续性方程可以定义出速度矢量势 $\boldsymbol{B}$，使得

$$\boldsymbol{v} = \mathrm{rot}\, \boldsymbol{B}. \tag{6.2.6}$$

由于

$$\boldsymbol{v} = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} = \frac{\partial \psi}{\partial y}\boldsymbol{i} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\boldsymbol{j}$$

$$= \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\boldsymbol{i}\right) \times \boldsymbol{k}$$

$$= \nabla\psi \times \boldsymbol{k} = \nabla \times (\psi\boldsymbol{k}). \tag{6.2.7}$$

比较这两个式子就得出

$$\boldsymbol{B} = \psi\boldsymbol{k}, \tag{6.2.8}$$

即 ψ 是矢量势 $\boldsymbol{B}$ 的模.

(5) $\psi - \omega$ 方程

对于平面流动，流体涡量 $\boldsymbol{\omega}$ 只有 z 轴方向分量，记为 ω，$\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{k}$.

又可根据(6.2.7)把涡量表示为

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{v} = \nabla \times (\nabla\psi \times \boldsymbol{k})$$

$$= (\boldsymbol{k} \cdot \nabla)\nabla\psi - (\nabla \cdot \nabla\psi)\boldsymbol{k}$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}\nabla\psi - \nabla^2\psi\,\boldsymbol{k}.$$

流函数 ψ 只是 x 和 y 的函数，因此上式成为

$$\boldsymbol{\omega} = -\nabla^2 \psi \boldsymbol{k}, \tag{6.2.9}$$

又可写为

$$\omega = -\nabla^2 \psi. \tag{6.2.10}$$

因此对于不可压缩流体的平面运动，流函数调和量的负值等于涡量 $\boldsymbol{\omega}$ 的模. (6.2.10)式是个很有用的方程，在数值计算中常用到它，通常称为 $\psi-\omega$ 方程.

上面叙述的定义和各项性质与流体是否具有粘性无关，因此不论是无粘性流体或者粘性流体均是适用的.

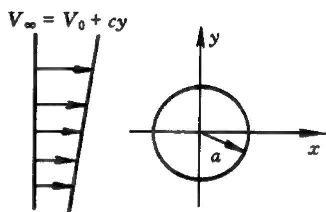


图 6.8 均匀剪切流定常绕流圆柱

例 6.2 均匀剪切流 $V_\infty = V_0 + cy$，绕过一半径为 a 的无限长直圆柱体，求流体作用在单位长圆柱上的合力. 设流体为不可压缩的，密度 ρ 为常数，无粘性，不计体力，流动为定常的.

解 这是无粘性不可压缩流体的平面运动，可以采用 $\psi-\omega$ 方程来解.

由已知条件，成立拉格朗日涡保持定理.

因为 $V_\infty = V_0 + cy$，所以

$$\omega\Big|_\infty = -\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_\infty = -c,$$

因而全流场涡量 $\omega = -c$.

现在可以列出流函数所满足的方程及边界条件：

$\nabla^2 \psi = c$，

在 $r=a$ 上，$\psi=0$，

在无穷远 $r\to\infty$ 处，$\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \psi}{\partial r} = c\sin^2\theta$，

$\oint_{r=a} -\dfrac{\partial \psi}{\partial r} r\mathrm{d}\theta = \Gamma$，$\Gamma$ 是任给定的环量；

第一个边界条件是容易理解的，圆柱周界线应是流线，通常取为零流线. 第二个边界条件是无穷远处来流速度以柱坐标表示的形式. 第三个边界条件是关于绕圆柱环量的条件，原题没有明确给出，需保留在其中.

把原定解问题分解成两组：$\psi = \psi_1 + \psi_2$.

(1) $\nabla^2 \psi_1 = c$，

无边界条件；

(2) $\nabla^2 \psi_2 = 0$，

$$\psi_2\big|_{r=a} = -\psi_1\big|_{r=a},$$

$$\frac{1}{r}\left.\frac{\partial \psi_2}{\partial r}\right|_{r=\infty} = c\sin^2\theta - \frac{1}{r}\left.\frac{\partial \psi_1}{\partial r}\right|_{r=\infty},$$

$$\oint_{r=a} -\frac{\partial \psi_2}{\partial r}\cdot r\mathrm{d}\theta = \Gamma + \oint_{r=a}\frac{\partial \psi_1}{\partial r} r\mathrm{d}\theta.$$

ψ_1 的物理意义是流场中若不存在圆柱时的流函数，ψ_2 的物理意义是圆柱对流场的干扰. 对于 ψ_1，由于不要求边界条件，可根据其物理意义找出特解

$$\psi_1 = V_0 y + \frac{1}{2}cy^2 = V_0 r\sin\theta + \frac{1}{2}cr^2\sin^2\theta,$$

于是 ψ_2 定解问题成为

$$\nabla^2\psi_2 = 0,$$

$$\psi_2\big|_{r=a} = -V_0 a\sin\theta - \frac{1}{2}ca^2\sin^2\theta,$$

$$\frac{1}{r}\left.\frac{\partial \psi_2}{\partial r}\right|_{r=\infty} = 0,$$

$$\oint_{r=a} -\frac{\partial \psi_2}{\partial r}\cdot r\mathrm{d}\theta = \Gamma + ca^2\pi.$$

令 $\psi_2 = R(r)\Theta(\theta)$，根据其单值性及周期性，拉普拉斯方程有通解

$$\psi_2 = A_0 + B_0\ln r + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^n}\right)\cos n\theta + \left(C_n r^n + \frac{D_n}{r^n}\right)\sin n\theta\right].$$

由边界条件 $\quad \frac{1}{r}\left.\frac{\partial \psi_2}{\partial r}\right|_{r=\infty} = 0$

得 $\quad A_n = C_n = 0 \quad (n\geqslant 1),$

由边界条件 $\quad \psi_2\big|_{r=a} = -V_0 a\sin\theta - \frac{1}{2}ca^2\sin^2\theta$

得 $\quad A_0 + B_0\ln a = -\frac{c}{4}a^2,$

$$B_2 = \frac{c}{4}a^4,$$

$$D_1 = -V_0 a^2,$$

其余 D_n, B_n 为零. 由

$$\oint_{r=a} -\frac{\partial \psi_2}{\partial r} r\mathrm{d}\theta = \Gamma + ca^2\pi$$

得 $\quad 2\pi B_0 = -\Gamma - ca^2\pi,$

所以 $\quad B_0 = -\frac{\Gamma + ca^2\pi}{2\pi}, A_0 = -\frac{c}{4}a^4 + \frac{(\Gamma + ca^2\pi)}{2\pi}\ln a,$

把 ψ_1 和 ψ_2 叠加就得到 ψ,

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = V_0 r\sin\theta + \frac{1}{2}cr^2\sin^2\theta$$
$$+ \left(\frac{\Gamma + ca^2\pi}{2\pi}\ln a - \frac{c}{4}a^2\right) - \frac{(\Gamma + ca^2\pi)}{2\pi}\ln r$$
$$+ \frac{c}{4}a^4\frac{1}{r^2}\cos 2\theta - \frac{V_0 a^2}{r}\sin\theta,$$

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = V_0\cos\theta + \frac{1}{2}cr\sin 2\theta$$
$$- \frac{ca^4}{2r^3}\sin 2\theta - \frac{V_0 a^2}{r^2}\cos\theta,$$

$$v_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = -V_0\sin\theta - cr\sin^2\theta$$
$$+ \frac{(\Gamma + ca^2\pi)}{2\pi}\frac{1}{r} + \frac{c}{2}a^4\frac{1}{r^3}\cos 2\theta - \frac{V_0 a^2}{r^2}\sin\theta.$$

在圆柱上
$$v_r\big|_{r=a} = 0,$$
$$v_\theta\big|_{r=a} = \frac{(\Gamma + 2ca^2\pi)}{2\pi a} - 2V_0\sin\theta - 2ca\sin^2\theta.$$

进一步利用伯努利方程求圆柱表面压强分布. 注意圆柱周界是流线,可以从 $\theta=0$ 到 θ 的圆周上两点列伯努利方程

$$p + \frac{1}{2}\rho v_\theta^2\bigg|_{r=a} = p_0 + \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\Gamma + 2ca^2\pi}{2\pi a}\right)^2,$$

p_0 是 $\theta=0$ 处圆柱表面的压强. 所以

$$p = p_0 + \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\Gamma + 2ca^2\pi}{\pi a} - 2V_0\sin\theta - 2ca\sin^2\theta\right)$$
$$\times(2V_0\sin\theta - 2ca\sin^2\theta).$$

单位长圆柱表面受力是

$$\boldsymbol{F} = -\oint_{r=a} p\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S$$
$$= -\frac{1}{2}\rho\oint_{r=a}\left(\frac{\Gamma + 2ca^2\pi}{\pi a} - 2V_0\sin\theta - 2ca\sin^2\theta\right)$$
$$\times(2V_0\sin\theta - 2ca\sin^2\theta)(\mathrm{d}y\boldsymbol{i} - \mathrm{d}x\boldsymbol{j})$$
$$= V_0\rho(\Gamma + 2ca^2\pi)\boldsymbol{j}$$

说明圆柱只受到升力作用.

*2. 流函数所满足的方程

无粘性不可压缩流体(密度不变)在体力有势条件下成立亥姆霍兹方程

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \boldsymbol{v},$$

对于平面流动，上式简化成为

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} = 0. \tag{6.2.11}$$

把(6.2.7)和(6.2.9)式代入上式得到

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(-\nabla^2 \psi \boldsymbol{k}) + (\nabla\psi \times \boldsymbol{k} \cdot \nabla)(-\nabla^2 \psi \boldsymbol{k}) \\
&= \left(-\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 \psi\right)\boldsymbol{k} - [\nabla\psi \times \boldsymbol{k} \cdot \nabla(\nabla^2 \psi)]\boldsymbol{k} \\
&= \left(-\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 \psi\right)\boldsymbol{k} - [\nabla(\nabla^2 \psi) \times \nabla\psi \cdot \boldsymbol{k}]\boldsymbol{k} \\
&= -\left[\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 \psi + \nabla(\nabla^2 \psi) \times \nabla\psi \cdot \boldsymbol{k}\right]\boldsymbol{k} = 0,
\end{aligned}$$

因此
$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 \psi + \nabla(\nabla^2 \psi) \times \nabla\psi \cdot \boldsymbol{k} = 0,$$

即
$$\left[\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 \psi \boldsymbol{k} + \nabla(\nabla^2 \psi) \times \nabla\psi\right] \cdot \boldsymbol{k} = 0.$$

左边方括号内矢量不可能与 $\boldsymbol{k}$ 垂直，因此得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 \psi \boldsymbol{k} + \nabla(\nabla^2 \psi) \times \nabla\psi = 0. \tag{6.2.12}$$

这就是无粘性不可压缩流体平面运动时流函数所满足的方程.

在定常运动情况下，(6.2.12)简化成为

$$\nabla(\nabla^2 \psi) \times \nabla\psi = 0, \tag{6.2.13}$$

说明流线和等$\nabla^2 \psi$线相同，因而沿流线$\nabla^2 \psi$是常数，

$$\nabla^2 \psi = -f(\psi). \tag{6.2.14}$$

比较 $\psi - \omega$ 方程，就可知道

$$f(\psi) = \omega, \tag{6.2.15}$$

这个值可由边界条件来确定.

3. 无粘性不可压缩流体的平面无旋运动

在无旋运动情况下，$\psi - \omega$ 方程化为拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \psi = 0. \tag{6.2.16}$$

流体的粘性与否，将在边界条件上体现出来. 下面叙述无粘性流体的流函数应满足的边界条件.

无粘性流体在刚壁边界上满足的是无渗透与无分离条件

$$(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n})|_w = \boldsymbol{v}_w \cdot \boldsymbol{n}_w.$$

此式的左边项可用流函数表示为

$$(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\Big|_{w}=\left(u\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}-v\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)\Big|_{w}$$

$$=\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)\Big|_{w}=\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}s}\Big|_{w}. \qquad (6.2.17)$$

右边项与刚壁的运动有关,不妨设刚壁以 $\boldsymbol{v}_0=u_0\boldsymbol{i}+v_0\boldsymbol{j}$ 平动,同时以角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ 转动,$\boldsymbol{\Omega}=\Omega\boldsymbol{k}$,因而

$$\boldsymbol{v}_w=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}_w.$$

这样边界条件就是

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}s}\Big|_{w}=\boldsymbol{v}_w\cdot\boldsymbol{n}_w$$

$$=(u_0\boldsymbol{i}+v_0\boldsymbol{j}+\Omega x_w\boldsymbol{j}-\Omega y_w\boldsymbol{i})\cdot\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{i}-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{j}\right)\Big|_{w}$$

$$=(u_0-\Omega y_w)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\Big|_{w}-(v_0+\Omega x_w)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\Big|_{w}. \qquad (6.2.18)$$

(6.2.18)式沿刚壁周界积分后得到

$$\psi|_{w}=u_0y_w-v_0x_w-\frac{1}{2}\Omega(x_w^2+y_w^2)+c, \qquad (6.2.19)$$

式中 c 是常数.

特别当这个刚壁静止时,(6.2.19)式简化成为

$$\psi|_{w}=c. \qquad (6.2.20)$$

这说明对于静止的刚性边界壁面,其周线是条流线. 常常令常数 c 为零,则对静止刚壁有

$$\psi|_{w}=0, \qquad (6.2.21)$$

即认为静止刚壁周界是条零流线.

可以看到,对于所讨论的无粘性不可压缩流体的平面无旋运动,除了可以归结为速度势 φ 的拉普拉斯方程纽曼问题之外,还可以归结为流函数的定解问题,流函数 ψ 也满足拉普拉斯方程,但却是狄利克雷问题

$$\nabla^2\psi=0,$$

$$\psi|_{w}=u_0y_w-v_0x_w-\frac{1}{2}\Omega(x_w^2+y_w^2).$$

此外还应给出其它相应的边界条件.

例 6.3 在无粘性不可压缩流体的无界流场中放置一无穷长的直圆柱,其半径作 $R=a\cos t$ 的变化,已知流动是无旋的,绕过此圆柱的环量是 Γ_0,用流函数建立该流动问题.

解 建立柱坐标系,流函数 ψ 满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}=0.$$

现在建立边界条件. 在圆柱边界上成立

$$\left.\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}s}\right|_{\mathrm{w}} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{w}} \cdot \boldsymbol{n}_{\mathrm{w}} = \dot{R}.$$

积分后有

$$\psi|_{\mathrm{w}} = \int_{r=a} \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}s} \cdot \mathrm{d}s = \int_0^\theta \dot{R}R\mathrm{d}\theta = \dot{R}R\theta$$

$$= -a^2 \sin t \cos t \cdot \theta.$$

此外有无穷远处的条件

$$\nabla \psi|_{r=\infty} = 0.$$

环量条件是

$$\oint_{r=a} -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot r\mathrm{d}\theta = \Gamma_0.$$

（二）不可压缩流体空间轴对称运动的流函数

对于空间轴对称的流动，速度分量只有两个，因而在不可压缩流体作空间轴对称运动时，连续性方程中也只有这两个速度分量的项出现，这就使得我们可以像在平面流动中所做过的那样引进流函数使连续性方程自动满足. 通常称不可压缩流体空间轴对称运动中引进的流函数为斯托克斯流函数.

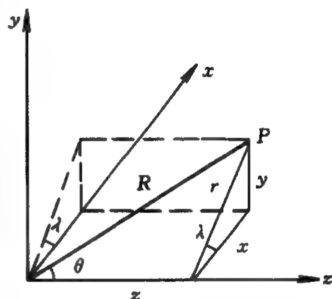


图 6.9　空间柱坐标系和球坐标系

对空间轴对称运动描述最方便的是采用柱坐标系或球坐标系(图 6.9).

在柱坐标系(r,θ,z)中，不可压缩流体的空间轴对称流动，其连续性方程是

$$\frac{\partial r v_z}{\partial z} + \frac{\partial r v_r}{\partial r} = 0, \tag{6.2.22}$$

式中 v_z 表示速度在对称轴(z 轴)上的分量，v_r 表示 r 轴上的分量.

引进斯托克斯流函数 ψ，满足

$$r v_z = \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad r v_r = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \tag{6.2.23}$$

或者

$$v_z = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad v_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z}. \tag{6.2.24}$$

显然，连续性方程(6.2.22)就自动满足了.

在球坐标(R,θ,λ)中，不可压缩流体的空间轴对称流动，其连续性方程是

$$\frac{1}{R}\frac{\partial R^2 v_R}{\partial R} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial \sin\theta v_\theta}{\partial \theta} = 0, \tag{6.2.25}$$

式中 v_R 是速度在 R 轴上的分量，v_θ 是 θ 轴上的分量.

引进球坐标系的斯托克斯流函数 ψ,满足

$$\sin\theta R^2 v_R = \frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \quad R\sin\theta v_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial R}, \tag{6.2.26}$$

或者

$$v_R = \frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \quad v_\theta = -\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial R}. \tag{6.2.27}$$

显然,连续性方程(6.2.25)也自动满足了.

斯托克斯流函数具有如下基本性质:

(1) 在过对称轴平面上的等流函数线就是流线.

(2) 过对称轴平面内任两点流函数值的差乘以 2π 等于通过这两点任意曲线绕对称轴旋转形成的旋转面的流量.

(3) 无粘性不可压缩流体空间轴对称的无旋运动,斯托克斯流函数满足.

在柱坐标系中,

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} = 0. \tag{6.2.28}$$

在球坐标系中

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial R^2} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) = 0. \tag{6.2.29}$$

和无粘性不可压缩流体平面无旋运动不同,(6.2.28)式和(6.2.29)式都不是拉普拉斯方程.

对于无粘性不可压缩流体空间轴对称的无旋运动,既可以对速度势 φ 解拉普拉斯方程的纽曼问题,也可以对斯托克斯流函数 ψ 解在一定边界条件下的方程(6.2.28)或(6.2.29). 由于斯托克斯流函数 ψ 满足的并不是拉普拉斯方程,要解就比较困难,通常也就不采用解流函数 ψ 的方法,因此不再对斯托克斯流函数的定解问题从数学上作更多讨论.

6.3 平面定常无旋运动的复势

无粘性不可压缩流体的平面无旋运动可以引进速度势 φ 或引进流函数 ψ 来求解,它们都满足拉普拉斯方程,前者是纽曼问题,后者是狄利克雷问题,这样的解法属于数理方程的范畴,在某些边界较简单的情况下可以求解,但在比较复杂的边界情况下,要解它不是容易的. 根据定义,在直角坐标系中有

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \tag{6.3.1}$$

$$v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{6.3.2}$$

这恰恰说明这两个调和函数是满足柯西－黎曼条件的，这就启示我们，对于平面无旋运动，可以通过复变函数求解析函数的方法来求解，在边界较复杂的情况下，用这种方法是可望取得成功的.

(一) 复势

由于调和函数 φ 和 ψ 满足柯西－黎曼条件，因此它们可以组成一个解析函数

$$W=\varphi+\mathrm{i}\psi=W(z),$$

式中 $z=x+\mathrm{i}y, \mathrm{i}=\sqrt{-1}$. $W(z)$称为平面无旋运动的复势.

复势 W 具有这样的性质

(1) 复势求导

对复势 $W(z)$求导有

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}-\mathrm{i}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=u-\mathrm{i}v. \tag{6.3.3}$$

可以看到复势导数的实部是 x 轴向的速度分量，导数的虚部是 y 轴向的速度分量的负值. 复势导数的共轭函数是

$$\overline{\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}}=u+\mathrm{i}v. \tag{6.3.4}$$

通常称$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}$为复速度，称$\overline{\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}}$为共轭复速度. 显然，复速度的模是速度绝对值

$$\left|\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}\right|=\sqrt{u^2+v^2}=U. \tag{6.3.5}$$

因此复速度又可写为

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}=U\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}, \tag{6.3.6}$$

式中

$$\alpha=\tan^{-1}\frac{v}{u}, \tag{6.3.7}$$

即 α 是速度的方向. 而共轭复速度可以表示为

$$\overline{\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}}=U\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}. \tag{6.3.8}$$

我们可以把无粘不可压缩流体平面无旋运动归结为求流场的复势 $W(z)$. 一旦求得 $W(z)$，根据所述性质，流场速度就可以求得

$$u=\mathrm{Re}\left\{\frac{\mathrm{d}W(z)}{\mathrm{d}z}\right\}, \tag{6.3.9}$$

$$v=-\mathrm{Im}\left\{\frac{\mathrm{d}W(z)}{\mathrm{d}z}\right\}. \tag{6.3.10}$$

然后，根据流动是无旋的特点，可以利用伯努利方程进一步求得压强分布.

(2) 复速度积分

对某一闭合回路 C 积分复速度，有

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}W(z)}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z = \oint_C \mathrm{d}W = \oint_C (\mathrm{d}\varphi + \mathrm{i}\mathrm{d}\psi) = \oint_C \mathrm{d}\varphi + \mathrm{i}\oint_C \mathrm{d}\psi. \tag{6.3.11}$$

根据环量 Γ 和流量 Q_V 定义，有

$$\Gamma = \oint_C \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \oint_C \nabla\varphi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \oint_C \mathrm{d}\varphi = \mathrm{Re}\left\{\oint_C \frac{\mathrm{d}W(z)}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z\right\}, \tag{6.3.12}$$

$$Q_V = \oint_C \mathrm{d}\psi = \mathrm{Im}\left\{\oint_C \frac{\mathrm{d}W(z)}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z\right\}, \tag{6.3.13}$$

因此

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}W(z)}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z = \Gamma + \mathrm{i}Q_V. \tag{6.3.14}$$

(二) 平面基本流动的复势

下面给出一些最简单，但是很重要的平面基本流动的复势.

1. 均匀直线流

假定复势是线性函数，

$$W(z) = cz, \tag{6.3.15}$$

讨论它是什么流动的复势.

首先设 c 是实数情况. 由复速度的定义

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z} = u - \mathrm{i}v = c,$$

即

$$u = c, \quad v = 0. \tag{6.3.16}$$

这说明流场各点速度都是相同的，c 就是其速度值. 当 $c>0$ 时，流动方向与正 x 轴方向一致；反之，当 $c<0$ 时，流动方向与负 x 轴方向一致.

其次，讨论 c 是复数情况，$c = V_\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}$ $(V_\infty > 0)$. 这时复速度是

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z} = u - \mathrm{i}v = c = V_\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} = V_\infty\cos\alpha - \mathrm{i}V_\infty\sin\alpha,$$

即

$$u = V_\infty\cos\alpha, \quad v = V_\infty\sin\alpha. \tag{6.3.17}$$

这同样说明流场各点速度是相同的，速度大小是 V_∞，速度方向与正 x 轴夹角是 α.

因此，对于大小为 V_∞，方向为 α 的均匀直线流，其流动复势是

$$W(z) = V_\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} z. \tag{6.3.18}$$

2. 点源(汇)

讨论对数函数

$$W(z) = A \ln z, \tag{6.3.19}$$

式中 A 是实数.

记 $z=x+\mathrm{i}y=re^{\mathrm{i}\theta}$, r 是 z 的模, θ 是 z 的辐角, 有

$$W(z)= \varphi + \mathrm{i}\psi = A \ln z = A \ln (re^{\mathrm{i}\theta}) = A \ln r + \mathrm{i}A\theta,$$

因而 $\qquad \varphi=A \ln r, \quad \psi=A\theta,$

流线是 $\qquad A\theta=c_1$(常量),

即 $\qquad \theta=$常量,

等势线是 $\qquad A\ln r=c_2$(常量),

即 $\qquad r=$常量,

说明流线是一族从原点出发的射线, 等势线是以原点为圆心的圆周族(图 6.10).

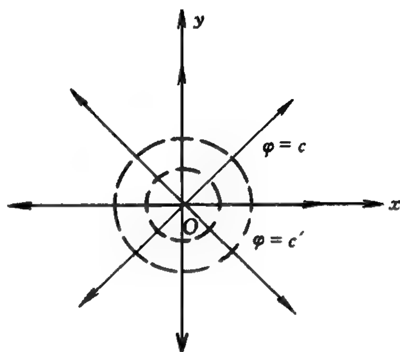


图 6.10 平面点源

速度是

$$v_r=\frac{\partial \varphi}{\partial r}=\frac{A}{r},$$

$$v_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}=0,$$

$$|\boldsymbol{v}|=\frac{|A|}{r},$$

说明流体速度与离开原点的距离成反比.

现在取一个包围原点的闭合回路 C, 计算复速度 $\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}$ 关于这个回路的积分, 根据(6.3.13)式,

$$Q_V = \mathrm{Im}\left\{\oint_C \frac{\mathrm{d}W(z)}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z\right\} = \mathrm{Im}\left\{\oint_C \frac{A}{z}\mathrm{d}z\right\} = 2\pi A,$$

因此 $\qquad A=\frac{Q_V}{2\pi}.$

而根据(6.3.12)式

$$\Gamma = \mathrm{Re}\left\{\oint_C \frac{\mathrm{d}W(z)}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z\right\} = \mathrm{Re}\left\{\oint_C \frac{A}{z}\mathrm{d}z\right\} = 0.$$

这说明对数函数 $W(z)=A \ln z$(A 是实数)表示了放置在原点的源或汇的流动复势. 当 $A>0$ 时, 流量 $Q_V>0$, 流体从原点流出, 是源; 当 $A<0$ 时, 流量 $Q_V<0$, 流体流入原点, 是汇.

所以对于放置在原点处、流量为 Q_s 的源(汇), 其流动复势是

$$W(z) = \frac{Q_s}{2\pi} \ln z, \tag{6.3.20}$$

如果点源(汇)放置在 $z=z_0$ 处,则其复势是

$$W(z)=\frac{Q_s}{2\pi}\ln(z-z_0), \tag{6.3.21}$$

式中 $Q_s>0$ 对应源,$Q_s<0$ 对应汇. Q_s 称作点源(汇)强度.

点源(汇)是最简单而又十分重要的流动现象之一,自然界和工程技术中有许多的流动现象可以用源(汇)来表示,下面以石油开采中的一个问题来说明点源(汇).

在实际的油田中,每口井附近的流动都可以近似为平面径向渗流. 服从达西定律(这里我们不来详细讨论这个定律,它是流体力学分支——渗流力学最基本的定律). 对于均匀等厚的地层,在稳定情况下,液流向生产井渗流的速度是

$$U=-\frac{k(p_e-p_w)}{\mu\ln\left(\dfrac{R_e}{R_w}\right)}\frac{1}{r}$$

式中 p_e 是油藏供给边缘处所保持的稳定压强,R_e 是供给边缘半径,R_w 是生产井的半径,p_w 是井筒内流动压强,它们都是常值. 从这个表达式可以看到流速是径向的,并和距中心的距离成反比,因此可以把生产井看成是点源,用复变函数方法来解决它,其结果和以渗流力学分析得到的结果是一致的. 同样的,可以把注入井看为点汇.

点源(汇)从物理上来说似乎是不可能的,因为在点源(汇)所在位置上流动速度将达到无穷大. 然而除去这点外它们恰恰是一些流动现象的很好近似.

3. 点涡

仍讨论对数函数,但有如下形式

$$W(z)=Ai\ln z, \tag{6.3.22}$$

式中 A 是实数.

记 $z=re^{i\theta}$,则有

$$W(z)=\varphi+i\psi=Ai\ln z=Ai\ln(re^{i\theta})$$
$$=-A\theta+iA\mathrm{Ln}\,r,$$

因而 $\varphi=-A\theta,\quad \psi=A\ln r.$

流线是 $A\ln r=c_1$ (常量),

即 $r=$常量.

等势线是 $-A\theta=c_2$ (常量),

即 $\theta=$常量.

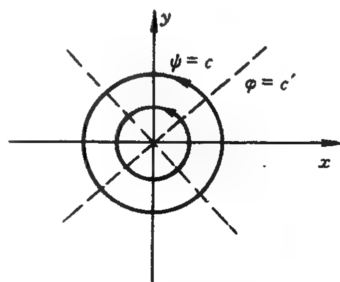


图 6.11 平面点涡

这说明流线是一族以原点为圆心的圆周线(图 6.11).

速度是

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0,$$

$$v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{A}{r},$$

$$|v| = \frac{|A|}{r},$$

流体速度与离开原点的距离成反比.

仍取一个包围原点的闭合回路 C,计算复速度$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}$关于这个回路的积分,根据(6.3.12)式和(6.3.13)式,

$$Q = \mathrm{Im}\left\{\oint_C \frac{\mathrm{d}W(z)}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z\right\} = \mathrm{Im}\left\{\oint_C \frac{A\mathrm{i}}{z}\mathrm{d}z\right\} = 0,$$

$$\Gamma = \mathrm{Re}\left\{\oint_C \frac{\mathrm{d}W(z)}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z\right\} = \mathrm{Re}\left\{\oint_C \frac{A\mathrm{i}}{z}\mathrm{d}z\right\} = -2\pi A,$$

因此　　$A = -\frac{\Gamma}{2\pi}.$

此时速度式为

$$v_r = 0,\quad v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}.$$

这说明复势(6.3.22)表示了位于 z 轴的无限长直涡线所诱导的流动,在 $x-y$ 平面上称为点涡.

所以对于放置在原点处、环量为 Γ 的点涡,其流动复势是

$$W(z) = \frac{\Gamma}{2\pi\mathrm{i}}\ln z \tag{6.3.23}$$

如果点涡放置在 $z = z_0$ 处,则其复势是

$$W(z) = \frac{\Gamma}{2\pi\mathrm{i}}\ln(z - z_0), \tag{6.3.24}$$

对应于 $\Gamma>0$ 是逆时针的流动,对应于 $\Gamma<0$ 是顺时针的流动.

4. 涡源(涡汇)

现在讨论更一般的对数函数

$$W(z) = (A + B\mathrm{i})\ln z. \tag{6.3.25}$$

同点源和点涡一样的处理可求得

$$\varphi = A\ln r - B\theta,$$

$$\psi = A\theta + B\ln r,$$

流线是　　$r = c_1 e^{-\frac{A}{B}\theta},$

等势线是　　$r = c_2 e^{\frac{B}{A}\theta},$

他们都是对数螺线(图 6.12).

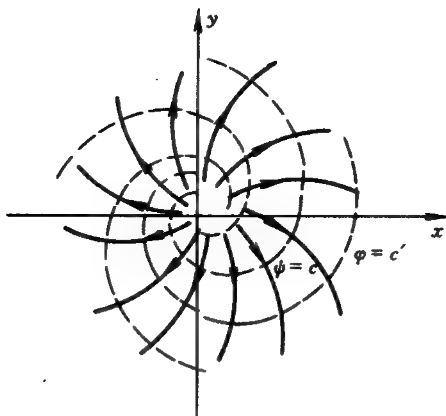


图 6.12 平面涡源

速度是

$$v_r = \frac{A}{r},$$

$$v_\theta = -\frac{B}{r},$$

$$|\boldsymbol{v}| = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{r}.$$

复速度沿包围原点闭合回路 C 的积分为

$$Q_V = \operatorname{Im}\left\{\oint_C \frac{\mathrm{d}W(z)}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z\right\} = \operatorname{Im}\left\{\oint_C \frac{A + B\mathrm{i}}{z}\mathrm{d}z\right\} = 2\pi A,$$

$$\Gamma = \operatorname{Re}\left\{\oint_C \frac{\mathrm{d}W(z)}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z\right\} = \operatorname{Re}\left\{\oint_C \frac{A + B\mathrm{i}}{z}\mathrm{d}z\right\} = -2\pi B.$$

所以对于原点处一个强度为 Q_S 的源和一个环量为 Γ 的涡叠加所得流场的复势是

$$W(z) = \left(\frac{Q_s}{2\pi} + \frac{\Gamma}{2\pi\mathrm{i}}\right)\ln z. \tag{6.3.26}$$

如果它们放置在 $z = z_0$,则叠加流场的复势是

$$W(z) = \left(\frac{Q_s}{2\pi} + \frac{\Gamma}{2\pi\mathrm{i}}\right)\ln(z - z_0). \tag{6.3.27}$$

这种叠加的流场常称为涡源或涡汇.

5. 偶极子

反比函数

$$W(z) = \frac{A}{z}, \tag{6.3.28}$$

式中 A 是实数. 流函数和速度势函数将是

$$\varphi=\frac{Ax}{x^2+y^2},$$

$$\psi=-\frac{Ay}{x^2+y^2}.$$

流线是

$$-\frac{Ay}{x^2+y^2}=c_1\quad(\text{常量}),$$

整理后有如下形式

$$x^2+\left(y+\frac{c_2}{2}\right)^2=\left(\frac{c_2}{2}\right)^2.$$

等势线是

$$\frac{Ax}{x^2+y^2}=c_3\quad(\text{常量}),$$

整理后有如下形式

$$\left(x-\frac{c_4}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{c_4}{2}\right)^2,$$

式中 c_2、c_4 都是常量．可见流线是与 x 轴相切的圆周族，等势线是与 y 轴相切的圆周族(图 6.13)．

速度是

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-A\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$v=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-A\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$|v|=\frac{|A|}{x^2+y^2},$$

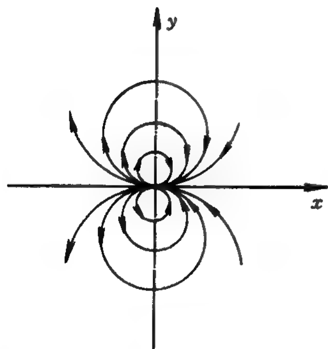


图 6.13　平面偶极子

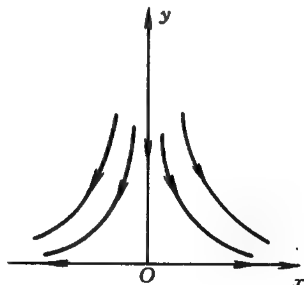


图 6.14　$W=az^2$ 的流动图案

速度大小与离原点距离平方成反比．

设想在实轴上离原点等距离两侧各放置一个源和一个汇，流量大小均为 Q_s．那么当这两个点源(汇)向原点靠拢时，其极限情况的叠加流场图案就是图 6.14 所显示的．这种流动常称为偶极子．现在来导出相应的表达式．设在 $x=$

$h(>0)$处放置一点源,强度 Q_s;在 $x=-h$ 处放置一点汇,强度 $-Q_s$,则复势是

$$W(z)=\frac{Q_s}{2\pi}\ln(z-h)-\frac{Q_s}{2\pi}\ln(z+h)$$

$$=\frac{Q_s}{2\pi}\cdot 2h\left[\frac{\ln(z-h)-\ln(z+h)}{2h}\right].$$

若 $h\to 0$ 时,$Q_s\to\infty$,但它们乘积趋于有限值 m_t,

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ Q_s\to\infty}} Q_s\cdot 2h=m_t,$$

则此偶极子流动复势就是

$$W(z)=\lim_{\substack{h\to 0\\ Q_s\to\infty}}\frac{Q_s}{2\pi}\cdot 2h\left[\frac{\ln(z-h)-\ln(z+h)}{2h}\right]$$

$$=\frac{m_t}{2\pi}\left[-\frac{\mathrm{d}\ln z}{\mathrm{d}z}\right]=-\frac{m_t}{2\pi}\frac{1}{z}=\frac{M_t}{2\pi}\frac{1}{z}. \tag{6.3.29}$$

称 $|M_t|=\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ Q_s\to\infty}} Q_s\cdot 2h$ 为偶极矩. 当 $M_t<0$ 时,源放置在正 x 轴上,汇放置在负 x 轴上,定义从汇指向源为偶极子方向,现在偶极子是指向正 x 轴方向. 当 $M_t>0$ 时,偶极子指向负 x 轴方向.

如偶极子放置在 $z=z_0$ 点上,偶极子方向与 x 轴平行,则复势是

$$W(z_0)=\frac{M_t}{2\pi}\frac{1}{z-z_0}. \tag{6.3.30}$$

这一节所讨论的几个基本流动除了均匀直线流以外,复势都具有奇点. 均匀直线流的复势 $W(z)=V_\infty e^{-i\alpha}z$ 在无穷远点有一阶极点,有时也可看作是奇点. 因此这几种基本流动流场奇点常称为流体动力学奇点.

例 6.4 无粘性不可压缩流体作平面无旋流动,若流场的复势是 $W=az^2$ $(a>0)$,在原点处压强为 p_0,试求:

(1) 上半平面的流动图案;

(2) 沿 $y=0$ 的速度与压强分布.

解 首先看更一般情况

$$W(z)=az^n,$$

n 是实数. 令 $z=re^{i\theta}$,于是

$$\varphi=ar^n\cos n\theta,$$

$$\psi=ar^n\sin n\theta.$$

零流线为 $\theta=0$,

以及 $\theta=\dfrac{k\pi}{n}\quad(k=\pm 1,\ \pm 2,\cdots\cdots)$,

它们是自原点发出的射线,把全平面构成夹角为$\frac{\pi}{n}$的角形区域. 流动速度是

$$v_r=\frac{\partial\varphi}{\partial r}=nar^{n-1}\cos n\theta,$$

$$v_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=-nar^{n-1}\sin n\theta.$$

本题 $n=2$,零流线是

$$\theta=0 \quad 及 \quad \theta=\frac{k\pi}{2}.$$

因此在上半平面构成了两个直角流动区域(图 6.14).

流动速度是

$$v_r=2ar\cos 2\theta,$$

$$v_\theta=-2ar\sin 2\theta.$$

在 $y=0$ 上(即 $\theta=0$ 及 $\theta=\pi$ 上),

$$v_r=2ar,$$

$$v_\theta=0.$$

由于流动是无旋的,可以用伯努利方程求压强分布. 自原点到所求的 $y=0$ 上的点$(r,0)$,(r,π)列伯努利方程

$$\frac{(2ar)^2}{2}+\frac{p}{\rho}=\frac{p_0}{\rho},$$

于是 $y=0$ 上压强分布是

$$p=p_0-2a^2r^2\rho.$$

6.4　定常绕流中柱体受力的复势表示

对于无粘性不可压缩流体的平面无旋定常绕流问题,可归结为求复势 $W(z)$的问题. 在求得复势后,单位长度柱体上所受到的流体作用力和力矩可以这样求得:先求出物体表面上的流体速度分布,然后根据伯努利方程求出物面上压强分布,将压强分布对剖面周线积分可求得单位长度柱体上所受的合力;将压强矢量对原点矩沿剖面周线积分则求得单位长度柱体上所受的合力矩.

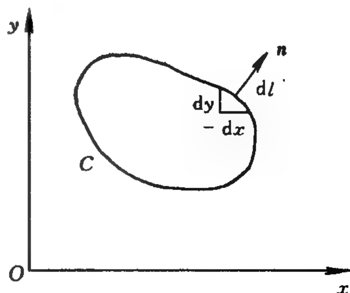


图 6.15　柱体剖面

(一) 布拉修斯定理

如图 6.15 所示,设 C 为柱体剖面的周界,

在 C 上取长为 $\mathrm{d}l$ 的微弧段,其外法向方向余弦是

$$(\cos(n,x),\ \cos(n,y)) = \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}l},\ -\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l}\right),$$

作用在 $\mathrm{d}l$ 上压强 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ 是

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = -p\boldsymbol{n}\mathrm{d}l,$$

即

$$\mathrm{d}F_x = -p\mathrm{d}y,$$

$$\mathrm{d}F_y = p\mathrm{d}x,$$

因此有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(F_x - \mathrm{i}F_y) &= -p\mathrm{d}y - \mathrm{i}p\mathrm{d}x = -\mathrm{i}p\cdot(\mathrm{d}x - \mathrm{i}\mathrm{d}y).\\ &= -\mathrm{i}p\mathrm{d}\bar{z}.\end{aligned} \tag{6.4.1}$$

注意(6.4.1)式 i 是虚数,根据定常流的伯努利方程

$$p = c_0 - \frac{1}{2}\rho v^2$$

而又有

$$v^2 = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}\cdot\overline{\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}\cdot\frac{\mathrm{d}\overline{W}}{\mathrm{d}\bar{z}},$$

这样压强 p 可表示为

$$p = c_0 - \frac{1}{2}\rho\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}\overline{W}}{\mathrm{d}\bar{z}}. \tag{6.4.2}$$

把(6.4.2)式代入(6.4.1)式后沿 C 积分,有

$$\begin{aligned}F_x - \mathrm{i}F_y &= \frac{1}{2}\mathrm{i}\rho\oint_C v^2\mathrm{d}\bar{z}\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{i}\rho\oint_C\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}\cdot\frac{\mathrm{d}\overline{W}}{\mathrm{d}\bar{z}}\cdot\mathrm{d}\bar{z},\end{aligned}$$

由于周界 C 是流线,在 C 上 $\mathrm{d}\psi=0$,则有

$$\frac{\mathrm{d}\overline{W}}{\mathrm{d}\bar{z}}\mathrm{d}\bar{z} = \mathrm{d}\overline{W} = \mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}W = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z,$$

因此

$$F_x - \mathrm{i}F_y = \frac{1}{2}\mathrm{i}\rho\oint_C\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}\right)^2\mathrm{d}z. \tag{6.4.3}$$

这就是定常绕流柱体上受力用复速度表示的式子,通常称为布拉修斯公式.

下面讨论合力矩的表示式.

$\mathrm{d}l$ 上合力分量 $\mathrm{d}F_x$ 和 $\mathrm{d}F_y$ 对原点力矩是

$$\begin{aligned}\mathrm{d}M_t &= -y\mathrm{d}F_x + x\mathrm{d}F_y = p(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y)\\ &= \mathrm{Re}\{pz\mathrm{d}\bar{z}\}.\end{aligned}$$

又由(6.4.2)式有

$$p\mathrm{d}\bar{z} = c_0\mathrm{d}\bar{z} - \frac{1}{2}\rho\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}\overline{W}}{\mathrm{d}\bar{z}}\cdot\mathrm{d}\bar{z},$$

因而

$$dM_t = \mathrm{Re}\left\{c_0 z d\bar{z} - \frac{1}{2}\rho z \frac{dW}{dz}\frac{d\overline{W}}{d\bar{z}}d\bar{z}\right\}$$

$$= \mathrm{Re}\left\{c_0 z d\bar{z} - \frac{1}{2}\rho z\left(\frac{dW}{dz}\right)^2 dz\right\},$$

沿 C 积分,

$$M_t = -\frac{1}{2}\rho\mathrm{Re}\left\{\oint_C z\left(\frac{dW}{dz}\right)^2 dz\right\}, \tag{6.4.4}$$

这是定常绕流柱体受力布拉修斯合力矩公式.

(二) 儒可夫斯基升力定理

讨论无穷远均匀来流的绕流问题,在周界 C 以外无奇点,则对任一包围物体周界 C 的圆周 C_1,复速度在 C_1 外域中可展开为罗朗级数,

$$\frac{dW}{dz} = \cdots + \frac{a_{-n}}{z^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots, \tag{6.4.5}$$

式中系数是

$$a_m = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{\frac{dW}{dz}}{z^{m+1}}dz\ (m = 0, \pm 1, \pm 2\cdots), \tag{6.4.6}$$

特别地,

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{dW}{dz}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}(d\varphi + i d\psi)$$

$$= \frac{1}{2\pi i}(\Gamma + iQ_s) = \frac{Q_s}{2\pi} + \frac{\Gamma}{2\pi i}.$$

因为　$$\left(\frac{dW}{dz}\right)\bigg|_{z=\infty} = V_\infty e^{-i\alpha},$$

则可发现　$$\begin{cases} a_0 = V_\infty e^{-i\alpha}, \\ a_1 = a_2 = \cdots = 0. \end{cases}$$

这样级数(6.4.5)就有这样形式

$$\frac{dW}{dz} = V_\infty e^{-i\alpha} + \frac{Q_s - i\Gamma}{2\pi}\frac{1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \cdots + \frac{A_n}{z^n} + \cdots, \tag{6.4.7}$$

将它代入布拉修斯公式(6.4.3),注意周界 C 上 Q_s 等于零

$$F_x - iF_y = \frac{1}{2}i\rho\oint_C\left(\frac{dW}{dz}\right)^2 dz$$

$$= \frac{1}{2}i\rho\oint_C\left(V_\infty e^{-i\alpha} + \frac{Q_s - i\Gamma}{2\pi}\frac{1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \cdots + \frac{A_n}{z^n} + \cdots\right)^2 dz$$

$$= \frac{1}{2}i\rho\oint_C V_\infty e^{-i\alpha}\cdot\frac{Q - i\Gamma}{\pi}\cdot\frac{1}{z}dz$$

$$= -\pi \cdot \rho V_\infty \frac{\Gamma}{\pi \mathrm{i}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}$$

$$= \rho V_\infty \Gamma \mathrm{i}(\cos\alpha - \mathrm{i}\sin\alpha)$$

$$= \rho V_\infty \Gamma \sin\alpha + \mathrm{i}\rho V_\infty \Gamma \cos\alpha,$$

即

$$F_x = \rho V_\infty \Gamma \sin\alpha,$$

$$F_y = -\rho V_\infty \Gamma \cos\alpha,$$

写成矢量形式则得到

$$\boldsymbol{F} = F_x \boldsymbol{i} + F_y \boldsymbol{j}$$

$$= \rho V_\infty \Gamma \sin\alpha \boldsymbol{i} - \rho V_\infty \Gamma \cos\alpha \boldsymbol{j} = \rho \boldsymbol{V}_\infty \times \boldsymbol{\Gamma}. \tag{6.4.8}$$

此式称为儒可夫斯基公式，它表明对于无粘性不可压流体的平面定常无旋流，流体作用在柱体上合力与均匀来流速度垂直，它称为升力.

对于合力矩，采用同样方法可求出

$$M_t = -\frac{1}{2}\rho \mathrm{Re}\left\{\oint_C z\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}\right)^2 \mathrm{d}z\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}\rho \mathrm{Re}\left\{2\pi \mathrm{i}\left(-\frac{\Gamma^2}{4\pi^2} + 2V_\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} \cdot A_2\right)\right\}. \tag{6.4.9}$$

可以注意到合力矩不仅与来流速度大小和方向有关，而且与复速度$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}$的罗朗级数中$\frac{1}{z^2}$项的系数有关，即与柱体剖面的周界形状和方位有关.

例 6.5 唐代诗人韦应物(737—约 792 年)出任滁州(今安徽滁县)刺史期间写下了一首优美的山水诗名篇：

独怜幽草涧边生，上有黄鹂深树鸣；

春潮带雨晚来急，野渡无人舟自横.

形象真实地描绘了河中荡漾的小船横在河里，处于一个稳定平衡位置，比西方关于稳定性精确描述的出现早了一千多年.

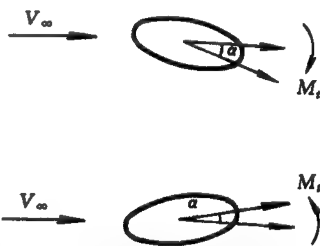


图 6.16 椭圆柱无环量绕流

现在用儒可夫斯基力矩公式(6.4.9)来分析这一现象.

设河水是理想无粘不可压缩流体，以匀速 V_∞ 二维流动，小船看作细长的椭圆，长短半轴和焦半径为 a、b 和 c. 椭圆长轴与流动方向夹角 α. 见图 6.16.

流动的复势为(习题 6.33)

$$W = \frac{1}{2}V_\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}(z + \sqrt{z^2 - c^2}) + \frac{1}{2}V_\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\left(\frac{a+b}{c}\right)^2 (z - \sqrt{z^2 - c^2}),$$

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{2}V_\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 + c^2}}\right) + \frac{1}{2}V_\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\left(\frac{a+b}{c}\right)^2\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 - c^2}}\right).$$

$\frac{1}{\sqrt{z^2-c^2}}$可展开为

$$\frac{1}{\sqrt{z^2-c^2}}=\frac{1}{z}+\sum_{1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{c}{2}\right)^{2n}z^{-(2n+1)},$$

代入$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}$,其中 z^{-2}的系数 A_2 是

$$A_2=\frac{1}{4}V_\infty c^2\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\left(\frac{a+b}{c}\right)^2\right].$$

本问题中 $\Gamma=0$,由(6.4.9)式可以求出椭圆柱所受力矩 M_t 为

$$\begin{aligned}M_t&=-\frac{1}{2}\rho\mathrm{Re}\left\{2\pi\mathrm{i}\cdot 2V_\infty\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\cdot\frac{1}{4}V_\infty c^2\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\left(\frac{a+b}{c}\right)^2\right]\right\}\\&=-\frac{1}{2}\rho\pi V_\infty^2(a^2-b^2)\sin 2\alpha.\end{aligned}$$

对于 $\alpha=0$,当来流或船体受一扰动,产生任一扰动小角 $\delta\alpha$,则力矩

$$\begin{aligned}\delta M_t\big|_{\alpha=0}&=\left[\frac{1}{2}\pi\rho(a^2-b^2)V_\infty^2\cdot 2\cos 2\alpha\delta\alpha\right]\Big|_{\alpha=0}\\&=\pi\rho V_\infty^2(a^2-b^2)\delta\alpha.\end{aligned}$$

δM_t 和 $\delta\alpha$ 同号,将使偏角增大,所以 $\alpha=0$ 的平衡不稳定.

而对于 $\alpha=\frac{\pi}{2}$时,对任一扰动角 $\delta\alpha$.

$$\delta M_t\big|_{\alpha=\frac{\pi}{2}}=-\pi\rho V_\infty^2(a^2-b^2)\delta\alpha.$$

δM_t 和 $\delta\alpha$ 异号,将使偏角减小. 因而当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$时,运动是平衡稳定的. 此时,正是“野渡无人舟自横”.

更详细的描述可参阅参考书[25].

6.5 奇点分布法解平面势流问题

无粘性不可压缩流体平面无旋流动的速度势函数 φ 和流函数 ψ 构成了复势 $W(z)$,如果求得了流场的复势,也就求得了流动速度. 在许多情况下,找复势往往要比解拉普拉斯方程求速度势 φ 或流函数 ψ 来得容易些,因此在这一节以及后继的两节中将介绍三种在一定条件下解平面势流问题的方法.

由于解析函数具有可迭加性,它们的线性组合仍是解析函数,所以若干个复势的线性组合代表了某种平面组合流动的复势. 上一节中给出了几种简单流动的复势,这几种简单流动称为流体力学奇点. 我们可以通过分布适当的奇点,使

得它们复势的线性组合满足具体问题的边界条件,那么这组合复势就是所求问题的解了. 这样一种方法常常称为奇点分布法,或奇点迭加法. 这一节将结合圆柱定常绕流这一流体力学经典问题来介绍奇点分布法.

(一) 无环量圆柱定常绕流

图 6.17 显示出无环量圆柱定常绕流的流动图案,显然这是无穷远处均匀直线来流和某种流体力学奇点迭加的结果. 把无穷远处均匀直线来流和各种流体力学奇点迭加,定性地分析流动情况,可以发现,最大可能性是无穷远处均匀直线来流和偶极子迭加. 为此,把平行于 x 轴而且速度是 V_∞ 的均匀直线流的复势

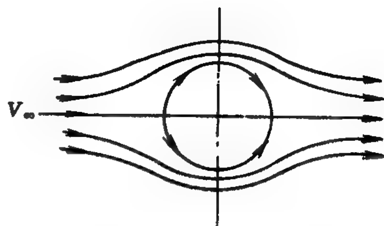


图 6.17 无环量圆柱定常绕流

$$W_1(z)=V_\infty z$$

和放置在原点复势为

$$W_2(z)=\frac{M_t}{2\pi}\frac{1}{z}(M_t>0)$$

的偶极子迭加起来,它们的组合流场的复势则是

$$W(z) = W_1(z) + W_2(z) = V_\infty z + \frac{M_t}{2\pi}\frac{1}{z}. \tag{6.5.1}$$

这个组合流场的复势(6.5.1)式是否是实际流场的复势? 是否满足圆柱边界条件? 为此下面分析式(6.5.1).

由(6.5.1)式有

$$\varphi + \mathrm{i}\psi = V_\infty(x + \mathrm{i}y) + \frac{M_t}{2\pi}\frac{x - \mathrm{i}y}{x^2 + y^2},$$

因此势函数和流函数分别是

$$\varphi = V_\infty x + \frac{M_t}{2\pi}\frac{x}{x^2 + y^2}, \tag{6.5.2}$$

$$\psi = V_\infty y - \frac{M_t}{2\pi}\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

流场的流线方程是

$$V_\infty y - \frac{M_t}{2\pi}\frac{y}{x^2 + y^2} = c \quad (\text{常量}), \tag{6.5.3}$$

这是三次曲线族. 复速度是

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z} = V_\infty - \frac{M_t}{2\pi}\frac{1}{z^2}. \tag{6.5.4}$$

由此可求得驻点位置 z_s,它应满足方程

$$V_\infty - \frac{M_t}{2\pi}\frac{1}{z_s^2} = 0,$$

解得

$$z_s = \pm\sqrt{\frac{M_t}{2\pi V_\infty}} = \pm a, \tag{6.5.5}$$

式中 $a = \sqrt{\dfrac{M_t}{2\pi V_\infty}}$. 所以组合流场有驻点$(-a,0)$和$(a,0)$.

进而考察过驻点的流线是怎样的曲线. 把驻点坐标(6.5.5)式代入(6.5.3)式,可求出过驻点流线所对应的参数 c_s.

$$c_s = \left(V_\infty y - \frac{M_t}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}\right)\Bigg|_{z=z_s} = 0,$$

因此过流场驻点的流线方程是

$$V_\infty y - \frac{M_t}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2} = 0. \tag{6.5.6}$$

它由两部分组成,

$$y = 0,$$

$$x^2 + y^2 = \frac{M_t}{2\pi V_\infty} = a^2,$$

对应了 x 轴和圆心在原点半径为 a 的圆周. 这样,复势(6.5.1)可以反映出以圆周为边界的某种流动.

从图 6.18 可以看到流场可分为圆内和圆外两部分.

圆内部分的流动是由在圆周 $|z| = a$ 内的原点上放置一偶极矩为 M_t 的偶极子造成的,复势是

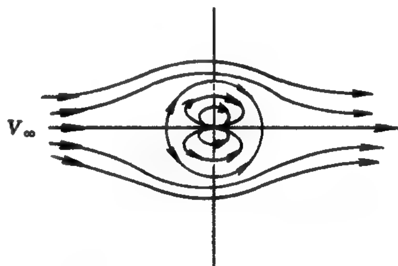


图 6.18　均匀来流和偶极子迭加流场

$$W(z) = \frac{M_t}{2\pi a^2}\left(z + \frac{a^2}{z}\right) \quad (|z| \leqslant a). \tag{6.5.7}$$

圆外部分的流动可看成为无穷远处速度为 V_∞ 的均匀直线流绕流半径为 a 的圆柱造成的,复势是

$$W(z) = V_\infty\left(z + \frac{a^2}{z}\right) \quad (|z| \geqslant a), \tag{6.5.8}$$

这圆外部分就是一开始所考虑的.

所以,无穷远均匀来流 V_∞ 定常绕过半径为 a 的圆柱可以由无穷远处均匀直线流 V_∞ 迭加一放置在原点偶极矩为 $M_t = 2\pi V_\infty a^2$ 的偶极子所构成,其流动

复势是(6.5.8)式.

现在对圆柱的无环量定常绕流问题详细讨论.

先求流场速度分布.

复速度是

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z} = V_\infty\left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right). \tag{6.5.9}$$

在圆柱表面上 $z = a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,复速度为

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}\right|_{z=a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} &= V_\infty(1 - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}) \\ &= 2V_\infty\sin^2\theta + 2V_\infty\sin\theta\cdot\cos\theta\mathrm{i},\end{aligned} \tag{6.5.10}$$

速度大小是

$$|v|\Big|_{z=a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = 2V_\infty|\sin\theta|. \tag{6.5.11}$$

可看到,在驻点处速度是零,在 $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$处速度达最大值 $V_{\max}$

$$V_{\max} = 2V_\infty.$$

再求圆柱受力.

圆柱上的压强分布可由伯努利方程求出. 设无穷远处均匀来流压强 p_∞,流场内任一点压强则是

$$p = p_\infty + \frac{\rho}{2}(V_\infty^2 - v^2). \tag{6.5.12}$$

在圆柱表面上的压强是

$$p\big|_{z=a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = p_\infty + \frac{\rho}{2}V_\infty^2(1 - 4\sin^2\theta). \tag{6.5.13}$$

定义压强系数 c_p,

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2}. \tag{6.5.14}$$

圆柱表面上的压强系数则为

$$c_p = 1 - 4\sin^2\theta. \tag{6.5.15}$$

图 6.19 画出了圆柱表面压强系数曲线,曲线 I 是根据式(6.5.10)画出的. 可看到,在前后驻点处($\theta = 0,\pi$),$c_p = 1$. 在 $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$处,$c_p$ 达最小值,$c_p = -3$,这里流速最快,压强最小. 在 $\theta = \pm\frac{\pi}{6}$和 $\theta = \pm\frac{5}{6}\pi$ 四处,$c_p = 0$,压强等于无穷远处均匀来流压强 p_∞.

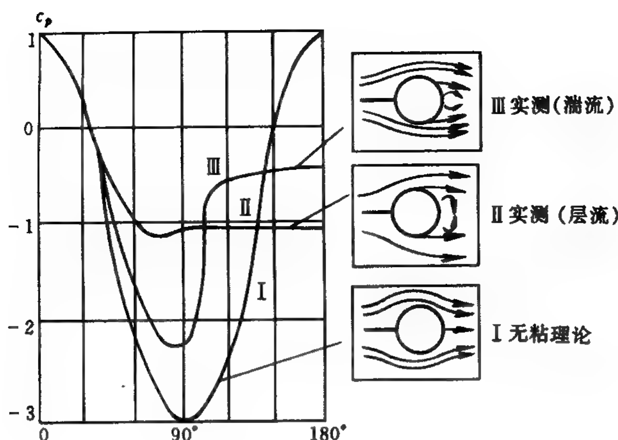


图 6.19　圆柱绕流压强曲线

圆柱所受合力 $\boldsymbol{F}$ 可由积分求出,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= \oint_C (-p)\boldsymbol{n}\mathrm{d}l \\ &= -\oint_C \left[p_\infty + \frac{\rho}{2}V_\infty^2(1-4\sin^2\theta)\right]\boldsymbol{n}\mathrm{d}l = 0.\end{aligned}$$

这说明当圆柱作无环量定常绕流时,是不承受力的,既不存在升力,也不承受阻力！这就是有名的所谓达朗伯佯谬,它首先由达朗伯在 1752 年得出.

达朗伯佯谬显然和真实流动是不相符的,流体定常绕过一个物体时不可能不对该物体产生阻力,那么这个佯谬是怎样产生的呢？回顾一下这个佯谬的推导过程. 前面已导出了柱体表面流动速度是(6.5.11)式,它表明速度大小关于 x 轴和 y 轴均是对称的. 根据无粘性流体定常运动的伯努利方程,流体对圆柱压强 p 的大小也是关于对称轴 x 轴和 y 轴对称分布的. 在所作流体无粘性假设下,流体对圆柱只有正压强,其大小就是 p 值,这样圆柱表面受到流体的对称分布的正压强作用,合力显然是零.

实验和数值计算的结果表明,由于真实流体存在粘性,因而流动现象及流体对物体的作用力和在无粘性假设下的理论结果是不同的. 对于真实流体,不仅因粘性作用使得流体对圆柱表面产生摩擦力,而且由于流动不对称,圆柱后出现尾涡,流体还将对圆柱作用压差力. 所以达朗伯佯谬产生的原因在于对流体所作的无粘性假设,使得实际上存在的粘性阻力和压差阻力全被忽略了.

图 6.19 是圆柱定常绕流的无量纲压强系数曲线. I 是无粘性假设下的理论曲线,II 是层流实验条件下实测到的压强曲线,III 是湍流实验条件下实测到的压强曲线. 可以看到无粘性假设下理论曲线和实测曲线明显不同.

对于物体受阻力问题有各种理论提出来加以讨论. 早期有牛顿粒子模型理

论,后来又有达朗伯流体平衡与连续性理论和亥姆霍兹－瑞利的间断面理论.本世纪初又有人试图从物体尾流中寻求解决途径,但均未给出令人满意结果,目前仍缺乏完整阻力理论.

(二) 有环量圆柱定常绕流(参见附录(A)中的照片 2)

对于有环量的圆柱定常绕流的复势,只需在无环量圆柱定常绕流的复势上,再迭加一个放置在原点、环量为 Γ 的点涡的复势即可,圆柱的边界条件显而易见是满足的,其形式是

$$W(z) = V_\infty\left(z + \frac{a^2}{z}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z. \tag{6.5.16}$$

复速度是

$$\frac{dW}{dz} = V_\infty\left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1}{z}, \tag{6.5.17}$$

驻点 z_s 由下面方程确定,

$$V_\infty\left(1 - \frac{a^2}{z_s^2}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1}{z_s} = 0, \tag{6.5.18}$$

可求出

$$z_s = \frac{\Gamma i}{4\pi V_\infty} \pm \sqrt{a^2 - \left(\frac{\Gamma}{4\pi V_\infty}\right)^2}. \tag{6.5.19}$$

驻点 z_s 的位置有三种情况:

(1) $|\Gamma| > 4\pi V_\infty a$

式(6.5.19)可写成

$$z_s = \left[\frac{\Gamma}{4\pi V_\infty} \pm \sqrt{\left(\frac{\Gamma}{4\pi V_\infty}\right)^2 - a^2}\right]i,$$

因此 z_s 的两个值都是虚值. 令

$$z_{s1} = \left[\frac{\Gamma}{4\pi V_\infty} + \sqrt{\left(\frac{\Gamma}{4\pi V_\infty}\right)^2 - a^2}\right]i,$$

并且讨论 $\Gamma > 0$ 的情况,则

$$|z_{s1}| = \frac{\Gamma}{4\pi V_\infty} + \sqrt{\left(\frac{\Gamma}{4\pi V_\infty}\right)^2 - a^2} > \frac{\Gamma}{4\pi V_\infty} > a,$$

说明 z_{s1} 在圆 $|z| = a$ 之外. 令另一驻点为 z_{s2},

$$z_{s2} = \left[\frac{\Gamma}{4\pi V_\infty} - \sqrt{\left(\frac{\Gamma}{4\pi V_\infty}\right)^2 - a^2}\right]i,$$

其模

$$|z_{s2}| = \frac{\Gamma}{4\pi V_\infty} - \sqrt{\left(\frac{\Gamma}{4\pi V_\infty}\right)^2 - a^2} < \frac{\Gamma}{4\pi V_\infty} - \left(\frac{\Gamma}{4\pi V_\infty} - a\right) = a,$$

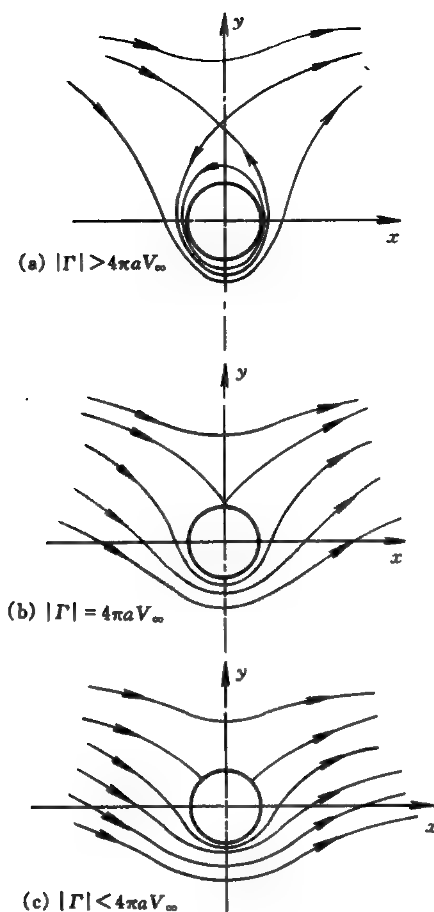


图 6.20　有环量圆柱定常绕流

说明 z_{s2}是在圆$|z|=a$之内.

流动图案可见图 6.20(a).

(2) $|\Gamma|=4\pi V_\infty a$

此时式(6.5.19)简化成

$$z_s=\frac{\Gamma \mathrm{i}}{4\pi V_\infty}=a\mathrm{i},$$

说明两个驻点重合,在圆$|z|=a$与虚轴的交点上.

流动图案可见图 6.20(b).

(3) $|\Gamma|<4\pi V_\infty a$

从(6.5.19)可看到此时驻点有两个.

$$|z_s|=\sqrt{\left(\frac{\Gamma}{4\pi V_\infty}\right)+a^2-\left(\frac{\Gamma}{4\pi V_\infty}\right)^2}=a,$$

这说明此时两个驻点不仅关于虚轴是对称的,而且都落在圆周上.

流动图案见图 6.20(c).

随着 Γ 的减小,两个驻点将顺着圆周向两边进一步分开. 当 $\Gamma=0$ 时,两个驻点将落在实轴上,$z_s=\pm a$,退化为上面所讨论的无环量圆柱定常绕流情况.

由(6.5.17)式可得到圆柱表面上速度

$$|\boldsymbol{v}| = \left|\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}\right|_{z=ae^{i\theta}}\right| = \left|V_\infty(1-\mathrm{e}^{-2i\theta})+\frac{\Gamma}{2\pi a\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-i\theta}\right|$$
$$= 2V_\infty\left|\sin\theta-\frac{\Gamma}{4\pi aV_\infty}\right|. \tag{6.5.20}$$

作用在圆柱上压强分布是

$$p\mid_{z=ae^{i\theta}} = p_\infty+\frac{1}{2}\rho V_\infty^2\left[1-\frac{(v\mid_{z=ae^{i\theta}})^2}{V_\infty^2}\right]$$
$$= p_\infty+\frac{1}{2}\rho V_\infty^2\left[1-4\left(\sin\theta-\frac{\Gamma}{4\pi aV_\infty}\right)^2\right]. \tag{6.5.21}$$

圆柱上压强系数是

$$c_p = 1-4\left(\sin\theta-\frac{\Gamma}{4\pi aV_\infty}\right)^2$$
$$= 1-4\sin^2\theta+\frac{2\Gamma\sin\theta}{\pi aV_\infty}-\frac{\Gamma^2}{4\pi^2a^2V_\infty^2}, \tag{6.5.22}$$

作用在圆柱上合力 $\boldsymbol{F}$ 为

$$\boldsymbol{F} = -\oint_C\left\{p_\infty+\frac{1}{2}\rho V_\infty^2\left[1-4\left(\sin\theta-\frac{\Gamma}{4\pi aV_\infty}\right)^2\right]\right\}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}l$$
$$= -\rho V_\infty\Gamma\boldsymbol{j}, \tag{6.5.23}$$

即

$$F_x = 0,\qquad F_y = -\rho V_\infty\Gamma. \tag{6.5.24}$$

式(6.5.23)就是上一节所导出的儒可夫斯基公式(6.4.8). 柱体固定,均匀来流以速度 V_∞ 绕过该圆柱时,柱体受力

$$\boldsymbol{F}=\rho\boldsymbol{v}_\infty\times\boldsymbol{\Gamma},$$

而当柱体相对静止流体以匀速 $\boldsymbol{v}_0$ 运动时,所受力则是

$$\boldsymbol{F}=-\rho\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{\Gamma},$$

这个与来流垂直的力称为升力,这显然是由于环量 $\boldsymbol{\Gamma}$ 存在的缘故.

早在 1672 年,牛顿就已经发现旋转着前进的物体受到侧向力的作用. 1810 年凯利将作用在物体上的力分为升力和阻力. 1852 年马格纳斯在实验中发现了这个侧向的升力,它使圆柱产生横向运动,这个现象后来被称为马格纳斯效应,工程上也有人称之为∑效应.

在日常生活中有些有趣的现象，是可以用马格纳斯效应来解释的．例如训练有素的足球运动员可以踢出旋转的球，其飞行轨迹是一条曲线，绕过对方的运动员及守门员而飞入球门内(图 6.21)．这种球俗称为"香蕉球"．有人就曾以马格纳斯效应详细分析过这一现象．网球、乒乓球中的"弧圈球"等，球体在飞行中强烈旋转，轨迹呈曲线状，着地后会向其它方向反弹，使对方无法防守，也是可用此理论加以解释的．

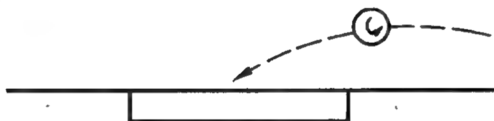


图 6.21　足球场上的"香蕉球"

人体血管中，管壁邻近存在一个血细胞较少的血浆层，而血细胞等有形成分随血流运动时有趋轴现象．对这个现象进行分析的一种观点是考虑到有形成分在剪切流场中将旋转，根据马格纳斯效应，它们受到指向管轴的横向力作用，从而向轴漂移．但马格纳斯效应是对无粘性流体而言的，对于粘性血流它是否仍然存在，还是要进一步加以讨论的．同样的现象，在工业管道中以液体输运颗粒物体时也存在．

通过均匀来流迭加偶极子以及点涡的方法得到了无环量圆柱定常绕流和有环量圆柱定常绕流的流动图案，下面再给出半体和椭圆柱平面绕流的例子(图 6.22)，其中所迭加的奇点的强度以及柱体周界曲线，流动复势，流线等请读者自行确定．

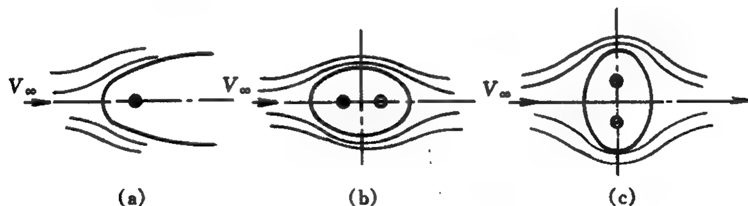


图 6.22　柱体绕流

(a) 半体柱　(b) 兰金椭圆柱　(c) 开尔文椭圆柱

本节通过对圆柱定常绕流的分析介绍了奇点迭加法．奇点迭加法的关键在于边界形状，要找一组适当的流体力学奇点，在它们迭加后的组合流场中，存在着这样的流线，其形状恰是所讨论问题的边界形状．这种方法带有某种程度的"凑合"尝试，因而也有人称其为奇点凑合法．

例 6.6　某一组合流场的流动复势是

$$W(z)=(1+i)\ln(z^2-1)+(2-3i)\ln(z^2+4)+\frac{1}{z},$$

它是由哪些流体力学奇点迭加而成的？求沿 $|z|=3$ 的速度环量及通过该圆周的流体体积流量.

解 可以重新把复势写成

$$\begin{aligned}W(z)=&\frac{(2\pi)}{2\pi}\ln(z+1)+\frac{(2\pi)}{2\pi}\ln(z-1)\\&-\frac{(2\pi)}{2\pi i}\ln(z+1)-\frac{(2\pi)}{2\pi i}\ln(z-1)\\&+\frac{(4\pi)}{2\pi}\ln(z+2i)+\frac{(4\pi)}{2\pi}\ln(z-2i)\\&+\frac{(6\pi)}{2\pi i}\ln(z+2i)+\frac{(6\pi)}{2\pi i}\ln(z-2i)\\&+\frac{(2\pi)}{2\pi}\frac{1}{z},\end{aligned}$$

因此流场由下述奇点迭加而成：$z=-1$，点源 2π；$z=1$，点源 2π；$z=-1$，环量 -2π 的点涡；$z=1$，环量 -2π 的点涡；$z=-2i$，点源 4π；$z=2i$，点源 4π；$z=-2i$，环量 6π 的点涡；$z=2i$，环量 6π 的点涡；$z=0$，指向负 x 轴方向的偶极子 2π.

$$\begin{aligned}\Gamma|_{|z|=3}&=\mathrm{Re}\left[\oint_{|z|=3}\frac{dW}{dz}dz\right]\\&=\mathrm{Re}\left\{\oint_{|z|=3}\left[\frac{(1+i)2z}{z^2-1}+\frac{(2-3i)2z}{z^2+4}-\frac{1}{z^2}\right]dz\right\}=8\pi,\end{aligned}$$

$$Q_V|_{|z|=3}=\mathrm{Im}\left[\oint_{|z|=3}\frac{dW}{dz}dz\right]=12\pi.$$

建议本节参看录像 I－3 中的有关部分和附录(A)中的照片 2 与 5.

6.6 镜像法解平面势流问题

有时会遇到这样的问题：一个物体绕流时，可以用某个流体力学奇点来代替它，流场的复势也就容易求得，例如求机翼升力时可以用点涡来代替，但如果在流场中还存在着直线边界或圆周边界(这相当机翼在地面附近或机翼放入风洞作吹风实验)，此时怎样求流场复势呢？这一节就介绍在流场中存在直线边界或圆周边界时求复势的方法——镜像法.

设想以 C 为边界的区域 τ' 之外存在一组流体力学奇点 S，如在 τ' 内放置另一组奇点 S' 之后，组合流场恰好存在这样一条流线，它就是边界 C；那末奇点 S' 就称为奇点 S 关于边界 C 的镜像，而由奇点 S 和 S' 构成的组合流场的复势就

是所求的τ'之外区域τ中流场的复势．求 S 的镜像来替代区域τ'，这种方法通常称为镜像法．

镜像法的关键有两点：一是所求的镜像奇点不能在原区域中，要保证原区域的奇性；二是组合流场中存在一条流线，就是边界 C．

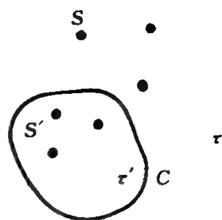


图 6.23　奇点及其镜像

(一) 圆定理

若在$|z|=a$的圆周之外无界流场中存在流体力学奇点，其复势已知为 $f(z)$，则当流场中放入$|z|=a$的圆周固壁之后流场的复势是

$$W(z) = f(z) + \bar{f}\left(\frac{a^2}{z}\right), \tag{6.6.1}$$

式中记号$\bar{f}(z)$的定义是除 z 之外将$f(z)$中所有虚数 i 改为 −i．

证明：首先，$f(z)$的奇点 z_i 都在圆外；$|z_i|>a$，则 $\bar{f}\left(\frac{a^2}{z}\right)$的奇点将是$\frac{a^2}{\bar{z}_i}$以及原点，因而他们都在圆内，这样 $\bar{f}\left(\frac{a^2}{z}\right)$不在$|z|>a$ 内增加新的奇点，从而保证了区域$|z|>a$ 的奇性．

现在考察圆周$|z|=a$．在圆周上 $z=a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，所以

$$\frac{a^2}{z}=a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}=\bar{z},$$

复势在圆周上为

$$W(z)=f(z)+\bar{f}(\bar{z})=f(z)+\overline{f(z)},$$

它只有实部，虚部为零，即 $\psi=0$，说明$|z|=a$ 是流线．

因此(6.6.1)式是满足边界条件的复势表示式．

例 6.7　大小为 V_∞的均匀直线来流，其方向与 x 轴成α 角，求半径为 a 的圆柱无环量绕流复势．

解　对于来流方向与 x 轴平行的无环量圆柱绕流，复势是(6.5.8)式

$$W(z)=V_\infty\left(z+\frac{a^2}{z}\right),$$

若来流方向与 x 轴成α 角，则只需作坐标转换，易得到

$$W(z) = V_\infty\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}z + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}a^2}{z}\right). \tag{6.6.2}$$

现在用圆定理来解这一问题．

与 x 轴成α 角、大小为 V_∞的均匀直线来流，流场复势是

$$f(z)=V_\infty\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}z.$$

根据圆定理，对于$|z|=a$ 的镜像的复势是

$$\bar{f}\left(\frac{a^2}{z}\right)=V_\infty e^{i\alpha}\ \frac{a^2}{z}.$$

因此圆周固壁之外流场的复势为

$$\begin{aligned}W(z)&=f(z)+\bar{f}\left(\frac{a^2}{z}\right)=V_\infty e^{-i\alpha}z+V_\infty e^{i\alpha}\ \frac{a^2}{z}\\&=V_\infty\left(e^{-i\alpha}z+e^{i\alpha}\ \frac{a^2}{z}\right).\end{aligned}$$

(二) 平面定理

现在讨论平面固壁边界的情况. 一种平面固壁设在 $y=0$ 位置,另一种设在 $x=0$ 位置.

1. 平面定理(1)

若在 $y>0$ 的上半平面中存在流体力学奇点,其复势已知为 $f(z)$,则当流场中放入 $y=0$ 的平面固壁之后,上半平面流场复势是

$$W(z)=f(z)+\bar{f}(z). \tag{6.6.3}$$

证明:首先,$f(z)$的奇点 z_i 已知都在$y>0$ 平面中,则 $\bar{f}(z)$的奇点 $\bar{z}_i$ 都将在下半平面$y<0$ 之内,不会破坏上半平面的奇性.

其次,考察平面固壁线 $y=0$. 在 $y=0$ 上,$z=\bar{z}$,所以复势在 $y=0$ 上为

$$W(z)=f(z)+\bar{f}(z)=f(z)+\bar{f}(\bar{z})=f(z)+\overline{f(z)}.$$

此式只有实部,而虚部为零,即 $\psi=0$,说明 $y=0$ 是流线.

因此(6.6.3)是所求满足边界条件的复势表示式.

例 6.8 如图 6.24 所示,在 $z_0=h\mathrm{i}$ 处放置一个环量为 Γ 的点涡,$y=0$ 是一无限长固壁,求流场复势及固壁上速度与压强分布.

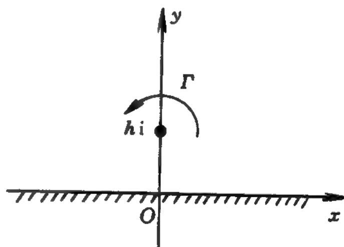


图 6.24 上半面点涡

解 当不存在固壁时,在 $z_0=h\mathrm{i}$ 处点涡的复势是

$$f(z)=\frac{\Gamma}{2\pi\mathrm{i}}\ln(z-h\mathrm{i}),$$

当放入固壁 $y=0$ 后,上半平面流动复势由(6.6.3)式确定为

$$W(z)=\frac{\Gamma}{2\pi\mathrm{i}}\ln(z-h\mathrm{i})-\frac{\Gamma}{2\pi\mathrm{i}}\ln(z+h\mathrm{i}),$$

流场复速度为

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}=\frac{\Gamma}{2\pi\mathrm{i}}\left(\frac{1}{z-h\mathrm{i}}-\frac{1}{z+h\mathrm{i}}\right)=\frac{\Gamma h}{\pi}\left(\frac{1}{z^2+h^2}\right),$$

因而在固壁 $y=0$ 上,

$$u = \frac{\Gamma h}{\pi}\left(\frac{1}{x^2 + h^2}\right),$$
$$v = 0.$$

由伯努利方程可求得平面 $y=0$ 上压强分布为

$$p = 常量 - \frac{1}{2}\rho V^2 = 常量 - \frac{1}{2}\rho\frac{\Gamma^2 h^2}{\pi^2}\cdot\frac{1}{(x^2+h^2)^2}.$$

2. 平面定理(2)

若在 $x>0$ 的右半平面中存在流体力学奇点,其复势为 $f(z)$,则当流场中放入 $x=0$ 的平面固壁之后,右半平面流场复势是

$$W(z) = f(z) + \bar{f}(-z). \tag{6.6.4}$$

证明:首先,$f(z)$的奇点 z_i 已知都在 $x>0$ 平面中,则 $\bar{f}(-z)$的奇点 $-\bar{z}_i$ 都将在 $x<0$ 区域内,因而没有破坏 $x>0$ 平面的奇性.

其次,考察平面固壁线 $x=0$. 在 $x=0$ 上,$z=-\bar{z}$,所以复势在 $x=0$ 上为

$$W(z) = f(z) + \bar{f}(-z) = f(z) + \bar{f}(\bar{z}) = f(z) + \overline{f(z)},$$

它的虚部为零,即 $\psi=0$,说明 $x=0$ 是流线.

因此(6.6.4)是所求满足边界条件的复势表示式.

例 6.9　如图 6.25 所示,在第一象限直角区域内 z_0 处放置一个环量为 Γ 的涡,求流场复势与复速度.

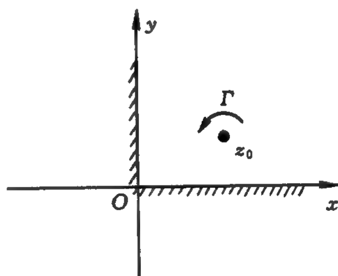


图 6.25　直角域内点涡

解　本题的流动区域是由 $x=0$ 和 $y=0$ 两个直线固壁为边界的,可以分开来考虑. 首先考虑存在 $x=0$ 固壁时的流场. 对于 z_0 处的涡 Γ,

$$f(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln(z - z_0),$$

则当放入 $x=0$ 固壁后,流场复势由(6.6.4)式确定,

$$W_1(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln(z - z_0) - \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln(-z - \bar{z}_0)$$
$$= \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln(z - z_0) - \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln(z + \bar{z}_0) + 常量.$$

然后放入固壁 $y=0$,则进一步由(6.6.3)确定最后所求流场的复势是

$$W = W_1(z) + \overline{W}_1(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln(z - z_0) - \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln(z + \bar{z}_0)$$
$$- \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln(z - \bar{z}_0) + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln(z + z_0) + 常量$$
$$= \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\frac{z^2 - z_0^2}{z^2 - \bar{z}_0^2}.$$

复势中的常量项对流场不起作用,故可以不予考虑.

复速度为

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}=\frac{\Gamma}{2\pi\mathrm{i}}\left(\frac{1}{z-z_0}-\frac{1}{z+\bar{z}_0}-\frac{1}{z-\bar{z}_0}+\frac{1}{z+z_0}\right)$$
$$=\frac{\Gamma}{\pi\mathrm{i}}z\left(\frac{1}{z^2-z_0^2}-\frac{1}{z^2-\bar{z}_0^2}\right)$$
$$=\frac{\Gamma}{\pi\mathrm{i}}z\frac{(z_0^2-\bar{z}_0^2)}{(z^2-z_0^2)(z^2-\bar{z}_0^2)}.$$

镜像法的实质是寻找奇点关于边界的映像点,因此本题还可以如图 6.26 所示那样找出 z_0 点关于 $x=0$ 和 $y=0$ 的镜像点.它们应在 $z=\bar{z}_0, z=-z_0, z=-\bar{z}_0$ 处,环量大小不变但方向要变化,这样就可直接求出流场的复势是

$$W(z)=\frac{\Gamma}{2\pi\mathrm{i}}[\ln(z-z_0)-\ln(z-\bar{z}_0)+\ln(z+z_0)-\ln(z+\bar{z}_0)]$$
$$=\frac{\Gamma}{2\pi\mathrm{i}}\ln\frac{z^2-z_0^2}{z^2-\bar{z}_0^2}.$$

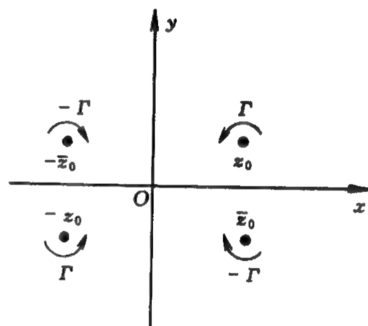


图 6.26 直角域内点涡及其镜像

6.7 共形映射法解平面势流问题

在实际问题中,许多流动区域是比较复杂的,例如绕机翼的流动,多角形区域内的流动等等,用前面介绍的奇点迭代方法和镜象法很难求得在这些复杂区域内流动复势. 根据复势函数的数学特性,借助于复变函数中的共形映射方法,就可以较好地解决一大部分这样的问题. 这个方法的基本思想是这样的,通过一个解析函数 $z=f(\zeta)$,把物理平面 z 上比较复杂的边界映射到辅助平面 ζ 上比较简单的边界,例如圆周或直线,而在辅助平面 ζ 上相应的流动问题较易求得复势,然后通过物理平面和辅助平面的对应映射关系来求得物理平面的流动复势.

(一) 基本思想

我们以周线为 C 的物体的不脱体绕流为例,阐述共形映射法的基本思想.

设在无穷远处有速度为 V_∞,方向为 α 角的均匀来流绕过一个周线为 C 的形状较复杂的物体. 若找到了一个解析函数 $z=f(\zeta)$,(令其反函数为 $\zeta=$

$F(z)$,将周线 C 变换为 ζ 平面上形状较简单的周线 C^*(如圆周),将 C 外的区域单值保角映射到 ζ 平面上周线 C^* 外的区域,并且规定了 $z=\infty$ 对应于 $\zeta=\infty$. 在这样映射下,辅助平面 ζ 上就形成了一个在无穷远处有速度为 V_∞^* 的均匀来流绕过周线为 C^* 的物体的流动.

辅助平面 ζ 上对应的流动复势设为 $W^*(\zeta)$,那末由于 $W^*(\zeta)$ 和 $\zeta=F(z)$ 也是解析函数,因此

$$W^*(\zeta) = W^*(F(z)) = W(z) \tag{6.7.1}$$

仍是解析函数,且代表物理平面的流动复势.

上面所说的过程是共形映射法的最基本的思想. 这样得到的解析函数 $W(z)$ 是否确实代表所求问题的流动复势呢? 现在来导出物理平面和辅助平面之间的一些对应关系,同时也就证实了这样得到的解析函数 $W(z)$ 确实代表物理平面上的流动复势.

(1) ζ 平面上等势线与流线对应到物理平面上仍为等势线与流线.

由于　　$W^*(\zeta)=\varphi^*(\xi,\eta)+\mathrm{i}\psi^*(\xi,\eta)$,

$W(z)=\varphi(x,y)+\mathrm{i}\psi(x,y)$,

这两个解析函数又满足

$$W^*(\zeta)=W^*(F(z))=W(z),$$

因此

$$\varphi^*(\xi,\eta) = \varphi(x,y), \tag{6.7.2}$$

$$\psi^*(\xi,\eta) = \psi(x,y), \tag{6.7.3}$$

所以 ζ 平面上等势线与流线对应到 z 平面上仍是等势线与流线. 也说明这样得到的 $W(z)$ 保证了物理平面上周线 C 是流线.

(2) ζ 平面和 z 平面上复速度关系

由于　　$$\frac{\mathrm{d}W^*(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta}=\frac{\mathrm{d}W(z)}{\mathrm{d}z}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta},$$

而且根据解析变换唯一性要求,已规定了所作映射使 $z=\infty$ 对应于 $\zeta=\infty$,并且

$$\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta}\right|_\infty = f'(\zeta)|_\infty = m_\infty > 0. \tag{6.7.4}$$

如果在 ζ 平面上设置的均匀来流大小为 $m_\infty V_\infty$,方向是 α,即

$$\left.\frac{\mathrm{d}W^*(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta}\right|_\infty = m_\infty V_\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha},$$

那么在物理平面上,无穷远处速度将是

$$\left.\frac{\mathrm{d}W(z)}{\mathrm{d}z}\right|_\infty = \left.\left(\frac{\mathrm{d}W^*(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta}\middle/\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta}\right)\right|_\infty = V_\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}.$$

这恰是速度为 V_∞,方向为 α 的均匀直线流的复速度. 反之就说明,对于速度为

V_∞,方向为 α 的均匀直线流绕过物体时,利用共形映射方法使得物体周界变换为 ζ 平面上较简单周界(如圆周),此时在 ζ 平面上应设置一个速度为 $m_\infty V_\infty$,方向仍为 α 角的均匀直线流.

(3) 速度环量和流量间关系

ζ 平面上任一封闭曲线 l^* 的速度环量 Γ^* 和通过它的流量 Q_v^* 由复速度的积分求得

$$\oint_{l^*}\frac{\mathrm{d}W^*(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta}\mathrm{d}\zeta=\Gamma^*+\mathrm{i}Q_v^*.$$

设和 l^* 对应的物理平面上的封闭曲线是 l,则 l 上的速度环量 Γ 和通过它的流量 Q_v 应是

$$\oint_{l}\frac{\mathrm{d}W(z)}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z=\Gamma+\mathrm{i}Q_v.$$

但是由于

$$\oint_{l^*}\frac{\mathrm{d}W^*(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta}\mathrm{d}\zeta=\oint_{l^*}\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta}\mathrm{d}\zeta=\oint_{l}\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}z,$$

所以

$$\Gamma^*+\mathrm{i}Q_v^*=\Gamma+\mathrm{i}Q_v,$$

即

$$\Gamma=\Gamma^*$$

$$Q_v=Q_v^*.$$

这同时也说明所得的复势 $W(z)$确保了原物理平面上点源和环量这两个奇点及它们的性质(但是偶极子情况就不同了,请读者思考.)

现在考察定常绕流问题的复势

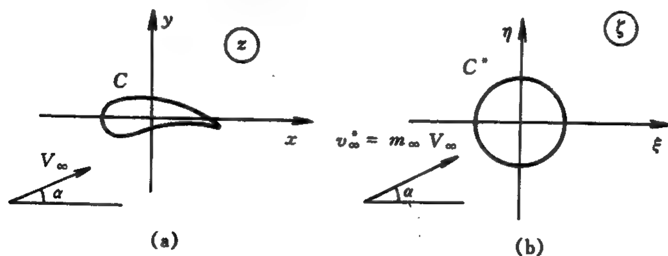


图 6.27 周界为 C 的物体映照为圆柱体

设无穷远处有一个速度为 V_∞,方向为 α 角的均匀直线来流绕过一个物体 C. 解析函数 $z=f(\zeta)$(反函数 $\zeta=F(z)$)将物体 C 外部单叶映照到 ζ 平面上半径为 a 的圆周 C^* 的外部(图 6.27). 记 $f'(\zeta)|_{\zeta=\infty}=m_\infty$,根据前面所述,在 ζ 平面上则是大小为 $m_\infty V_\infty$,方向为 α 的均匀来流绕过一半径为 a 的圆柱. 容易写出映照平面 ζ 上该问题的复势 $W^*(\zeta)$,

$$W^*(\zeta) = m_\infty V_\infty e^{-i\alpha}\zeta + \frac{m_\infty V_\infty e^{i\alpha} a^2}{\zeta} + \frac{\Gamma^*}{2\pi i}\ln \zeta, \tag{6.7.5}$$

于是物理平面上物体 C 定常绕流的复势就是

$$\begin{cases} W(z) = m_\infty V_\infty e^{-i\alpha}\zeta + \dfrac{m_\infty V_\infty e^{i\alpha} a^2}{\zeta} + \dfrac{\Gamma}{2\pi i}\ln \zeta, \\ \zeta = F(z). \end{cases} \tag{6.7.6}$$

物理平面上的复速度是

$$\begin{cases} \dfrac{dW}{dz} = \dfrac{dW^*}{d\zeta}\bigg/\dfrac{d\zeta}{dz} = \left(m_\infty V_\infty e^{-i\alpha} - \dfrac{m_\infty V_\infty e^{i\alpha} a^2}{\zeta^2} + \dfrac{\Gamma}{2\pi i}\dfrac{1}{\zeta}\right)\bigg/\dfrac{dz}{d\zeta}, \\ \zeta = F(z). \end{cases} \tag{6.7.7}$$

综观这个过程可看到,关键在于寻找出所需的解析函数 $z = f(\zeta)$.

然而仔细的观察和思考就会发现,(6.7.6)式还没有完全解决所求的问题,主要原因是还无法确定该式之中的环量值 Γ. 在前面的讨论中已发现环量 Γ 的确定是十分重要的,它决定了定常绕流物体的受力大小. 下面介绍具有尖后缘机翼定常绕流及速度环量 Γ 确定的方法.

(二) 儒可夫斯基假定及环量的确定

考虑具有尖后缘翼型的定常绕流问题. 大量的观察发现,流动冲角不大以至无严重流动分离时,翼型上下两股气流总在尖后缘上汇合,下股气流不会绕过尖后缘流至翼型上侧,上股气流也不会绕过尖后缘流至翼型下侧. 因此可认为在尖后缘处,流动速度值是有限值. 通常把这假定称为儒可夫斯基假定(或库塔条件).

根据这一重要的假定就可以求出具有尖后缘翼型定常绕流的环量值.

在物理平面 z 上的周界 C 通过解析函数 $z = f(\zeta)$ 映射到变换平面 ζ 上的圆周 C^*,设尖后缘点 B 对应于变换平面 ζ 上 B^* 点(图 6.28). B 点的外角是 $2\pi - \delta$, B^* 点的外角是 π,显然 $z = f(\zeta)$ 在 B 点的保角性破坏,因而必然有

$$\left.\frac{dz}{d\zeta}\right|_{B^*} = 0.$$

儒可夫斯基假定认为,B 点的流动速度值是有限的,即 $\left.\dfrac{dW}{dz}\right|_B$ 为有限值,于是

$$\left.\frac{dW^*}{d\zeta}\right|_{B^*} = \left.\frac{dW}{dz}\right|_B \cdot \left.\frac{dz}{d\zeta}\right|_{B^*} = 0. \tag{6.7.8}$$

将此结果代入(6.7.5)式,

$$\left.\left(m_\infty V_\infty e^{-i\alpha} - \frac{m_\infty V_\infty e^{i\alpha} a^2}{\zeta^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1}{\zeta}\right)\right|_{B^*} = 0. \tag{6.7.9}$$

记
$$\zeta_{B^*} = a e^{i\theta},$$

θ 是尖后缘点 B 的映象点的极角,于是有

$$m_\infty V_\infty e^{-i\alpha} - m_\infty V_\infty e^{i(\alpha-2\theta)} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\cdot\frac{1}{a}\cdot e^{-i\theta} = 0. \tag{6.7.10}$$

由此解出

$$\Gamma = 4\pi a m_\infty V_\infty \sin(\theta - \alpha). \tag{6.7.11}$$

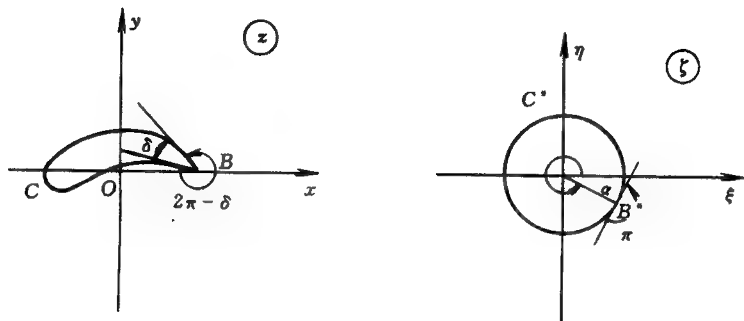


图 6.28 具有尖后缘点机翼映照为圆

这样,在儒可夫斯基假定基础上导出了尖后缘翼型定常绕流时环量 Γ 的表示式(6.7.11). 现在,问题原则上已经解决,留下的是数学上怎样找解析函数的问题.

对于尖后缘翼型的绕流问题可用(6.7.1)求环量 Γ,但若翼型不具有尖后缘,那么就无法从理论上求 Γ,只能用实验测得或者事先给定,这是要注意的.

翼型绕流的环量是怎样产生的呢? 现在看一下静止流场中的翼型在加速至 V_0 的过程中环量产生的物理过程.

在静止流场中有一翼型(图 6.29(a)),作一包围该翼型并延伸到足够远的封闭流体线 C. 翼型启动前,显然沿 C 的速度环量为零,由开尔文定理可知沿 C 的速度环量将始终保持为零. 现在翼型启动,速度达到 V_0(图 6.29(b)),此时后缘点 A 处流动速度达到很大的值,压强降低,机翼下侧面流体将绕过 A 点流向驻点 B. 由于流动是低压向高压方向进行,流动形成分离,产生逆时针涡旋随流体向尾部移动,在尾部脱落. 由于沿 C 的总环量是零,因此在翼型上必然同时产生一个与脱落的涡强度相等方向相反的涡,这个涡的作用使得驻点向后

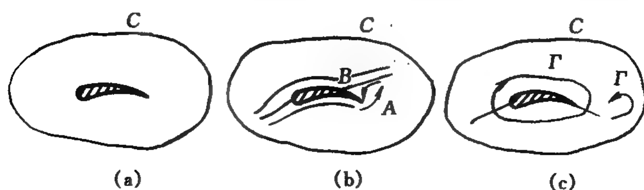


图 6.29 机翼绕流时环量的产生过程

缘点移动，在尚未到达后缘点时，不断有反时针涡产生并脱落，而在翼型上涡的强度也将继续加强．

不断脱落流向下游的涡称为起动涡，附在翼型上的涡称为附着涡．机翼以 V_0 继续飞行，翼面上驻点后移直到后缘点，翼型上下两侧的两股流动在后缘处汇合．此时，不再有涡从翼面脱落，附着涡的强度也不再发生变化，机翼的环量值就是对应于均匀直线来流情况下翼型绕流的环量值 Γ（图 6.29(c)）．可参看附录(A)中的照片 1．

（三）儒可夫斯基变换及其应用

儒可夫斯基变换函数定义为

$$z = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{b^2}{\zeta}\right), \tag{6.7.12}$$

式中 b 是实常数．这个函数有一阶分支点 $\zeta = \pm b$．为了保证映照的要求，它的反函数取下面单值分支，

$$\zeta = z + \sqrt{z^2 - b^2}, \tag{6.7.13}$$

这就使得 $z \to \infty$ 对应于 $\zeta \to \infty$．儒可夫斯基函数除分支点 $\zeta = \pm b$ 之外处处存在导数

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{b^2}{\zeta^2}\right), \tag{6.7.14}$$

说明除 $\zeta = \pm b$ 之外处处保角．

1．儒可夫斯基函数的几何性质

(1) z 平面上半宽长为 b 的直线段变换为 ζ 平面上半径为 b 的圆周（图 6.30）．

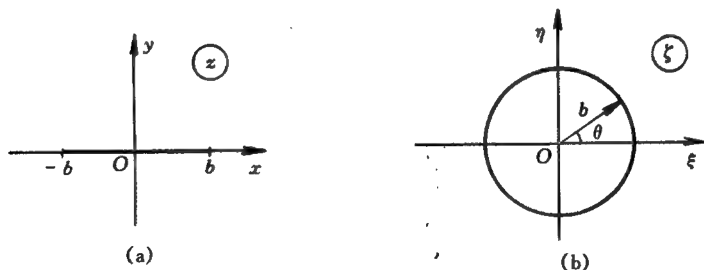


图 6.30　直线段映射为圆周

(2) z 平面上长、短半轴分别为 a_1、b_1 的椭圆变换为 ζ 平面上半径为 a 的圆周（图 6.31）．

参数 a、b 由下式确定，

$$a = a_1 + b_1, \tag{6.7.15}$$

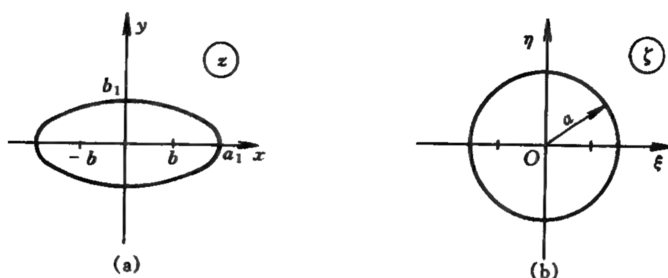


图 6.31 椭圆映射为圆周

$$b=\sqrt{a_1{}^2-b_1{}^2}. \tag{6.7.16}$$

变换参数 b 即是所给椭圆的半焦距.

(3) z 平面上圆弧变换为 ζ 平面上偏心圆周(图 6.32).

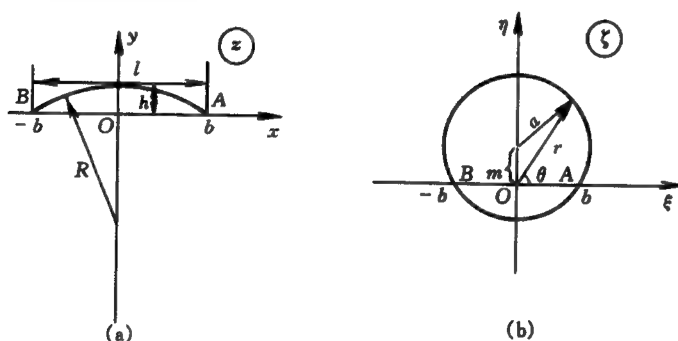


图 6.32 偏心圆弧映射为偏心圆周

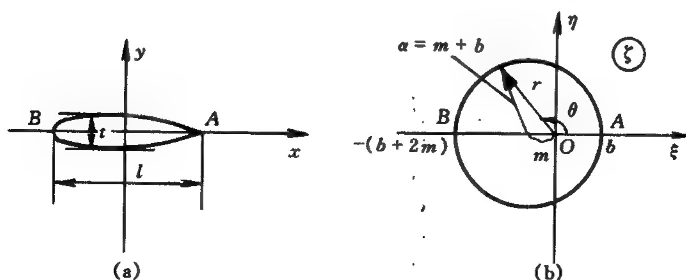


图 6.33 对称机翼映射为偏心圆周

已知圆弧参数 R 和 b,映射圆的偏心距 m 由

$$R=\sqrt{b^2+\frac{1}{4}\left(\frac{b^2}{m}-m\right)^2} \tag{6.7.17}$$

确定,映射圆周半径 a 为

$$a = \sqrt{m^2 + b^2}. \tag{6.7.18}$$

(4) z 平面上对称机翼变换为 ζ 平面上偏心圆周(图 6.33).

(5) z 平面上儒可夫斯基机翼变换为 ζ 平面上偏心圆周(图 6.34).

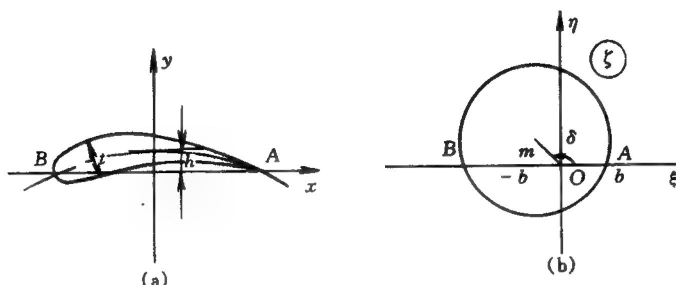


图 6.34　儒可夫斯基机翼映射为偏心圆周

由于非常复杂,这里不写出性质(4)、(5)中参数之间表示式.

2. 儒可夫斯基变换的应用

下面举例说明儒可夫斯基变换在柱体定常绕流中的应用.

例 6.10　长 $2b$ 的平板放置在无粘性不可压缩流体之中,速度为 V_∞ 的均匀来流平行绕过该平板,冲角为 α,试求:

(1) 流场复势及复速度;

(2) 平板后缘满足儒可夫斯基条件时的环量 Γ;

(3) 单位长度升力系数 c_L'(图 6.35).

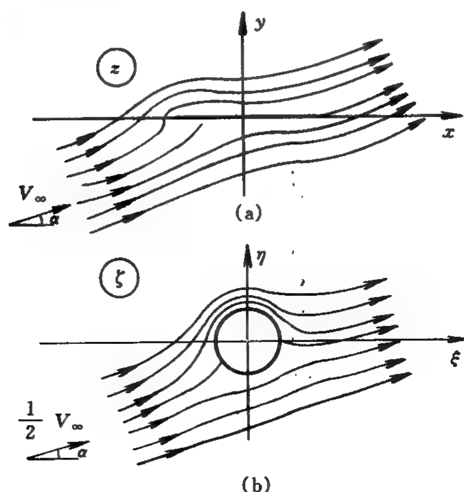


图 6.35　平板绕流

解 利用儒可夫斯基变换函数的反函数

$$\zeta = z + \sqrt{z^2 - b^2},$$

将 z 平面上长 $2b$ 的平板映照为 ζ 平面上半径为 b 的圆，z 平面上速度为 V_∞、冲角为 α 的均匀来流绕过平板，在 ζ 平面上对应为速度为 $\frac{1}{2}V_\infty$、冲角为 α 的均匀来流绕该圆周. ζ 平面的流动复势是

$$W^*(\zeta) = \frac{1}{2}V_\infty\left(e^{-i\alpha}\zeta + \frac{b^2}{\zeta}e^{i\alpha}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\zeta,$$

因而物理平面上流动复势将是

$$W(z) = \frac{1}{2}V_\infty\left[e^{-i\alpha}(z + \sqrt{z^2 - b^2}) + \frac{b^2}{z + \sqrt{z^2 - b^2}}e^{i\alpha}\right] + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln(z + \sqrt{z^2 - b^2}).$$

由于

$$\begin{aligned} & e^{-i\alpha}(z + \sqrt{z^2 - b^2}) + \frac{b^2 e^{i\alpha}}{(z + \sqrt{z^2 - b^2})} \\ &= e^{-i\alpha}(z + \sqrt{z^2 - b^2}) + e^{i\alpha}(z - \sqrt{z^2 - b^2}) \\ &= 2z\frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} - 2i\sqrt{z^2 - b^2}\cdot\frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \\ &= 2z\cos\alpha - 2i\sin\alpha\cdot\sqrt{z^2 - b^2}, \end{aligned}$$

$$\ln(z + \sqrt{z^2 - b^2}) = \mathrm{ch}^{-1}\frac{z}{b} + \ln b.$$

在略去对速度场不起影响的常数项之后，复势为

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{1}{2}V_\infty(2z\cos\alpha - 2i\sin\alpha\sqrt{z^2 - b^2}) + \frac{\Gamma}{2\pi i}\mathrm{ch}^{-1}\frac{z}{b} \\ &= V_\infty\cdot z\cdot\cos\alpha - iV_\infty\sin\alpha\sqrt{z^2 - b^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\mathrm{ch}^{-1}\frac{z}{b}. \end{aligned}$$

复速度是

$$\frac{dW(z)}{dz} = V_\infty\cos\alpha - iV_\infty\sin\alpha\frac{z}{\sqrt{z^2 - b^2}} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1}{\sqrt{z^2 - b^2}}.$$

平板后缘满足儒可夫斯基条件时的环量由(6.7.11)式求得为

$$\Gamma = -2\pi b V_\infty \sin\alpha.$$

升力由(6.4.8)式求得为

$$L = \rho V_\infty|\Gamma| = 2\pi b V_\infty^2\rho\sin\alpha.$$

升力系数是

$$c_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2} = 4\pi b\sin\alpha.$$

单位长度升力系数为

$$C_L' = \frac{c_L}{l} = \frac{4\pi b \sin\alpha}{2b} = 2\pi \sin\alpha .$$

在冲角较小时

$$c_L' \sim 2\pi\alpha ,$$

说明单位板长升力系数与冲角 α 成正比,与来流速 V_∞ 及板长无关.

例 6.11　求速度为 V_∞、冲角为 α 的均匀来流绕过儒可夫斯基翼型的流动复势、复速度及环量(图 6.36).

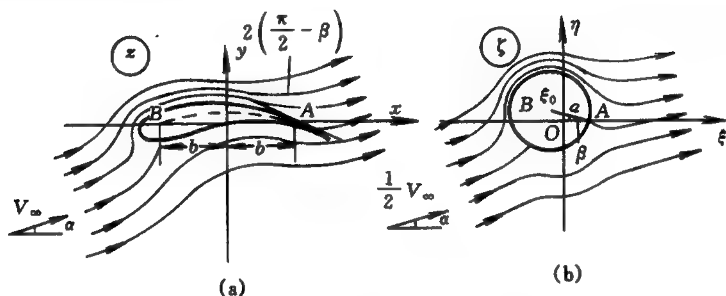


图 6.36　儒可夫斯基翼型绕流

解　利用儒可夫斯基变换将该翼型映照为 ζ 平面上偏心圆,其圆心位于 $\zeta=\zeta_0$ 处,半径为 a. 在 ζ 平面上对应有大小为$\frac{1}{2}V_\infty$,冲角为 α 的均匀来流.

在 ζ 平面上,偏心圆的绕流复势易求得为

$$W^*(\zeta) = \frac{1}{2}V_\infty\left[e^{-i\alpha}(\zeta-\zeta_0) + \frac{a^2 e^{i\alpha}}{(\zeta-\zeta_0)}\right] + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln(\zeta-\zeta_0),$$

ζ 平面上复速度是

$$\frac{dW^*}{d\zeta} = \frac{1}{2}V_\infty\left[e^{-i\alpha} - \frac{a^2 e^{i\alpha}}{(\zeta-\zeta_0)^2}\right] + \frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1}{(\zeta-\zeta_0)},$$

因此在 z 平面上复势是

$$W(z) = \frac{1}{2}V_\infty\left[e^{-i\alpha}(z+\sqrt{z^2-b^2}-\zeta_0) + \frac{a^2 e^{i\alpha}}{(z+\sqrt{z^2-b^2}-\zeta_0)}\right] + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln(z+\sqrt{z^2-b^2}-\zeta_0),$$

在 z 平面上复速度是

$$\frac{dW}{dz} = \frac{dW^*}{d\zeta}\Big/\frac{dz}{d\zeta}$$

$$= \left\{\frac{1}{2}V_\infty\left[e^{-i\alpha} - \frac{a^2e^{i\alpha}}{(\zeta-\zeta_0)^2}\right] + \frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1}{(\zeta-\zeta_0)}\right\}\bigg/\frac{1}{2}\left(1-\frac{b^2}{\zeta^2}\right)$$

$$= \left\{V_\infty\left[e^{-i\alpha} - \frac{a^2e^{i\alpha}}{(z+\sqrt{z^2-b^2}-\zeta_0)^2}\right] + \frac{\Gamma}{\pi i}\frac{1}{(z+\sqrt{z^2-b^2}-\zeta_0)}\right\}$$

$$\cdot\frac{(z+\sqrt{z^2-b^2})^2}{(z+\sqrt{z^2-b^2})^2-b^2},$$

速度环量由(6.7.11)式求得是

$$\Gamma = -2\pi bV_\infty\sin(\alpha+\beta),$$

升力是

$$L = \rho V_\infty|\Gamma| = 2\pi b\rho V_\infty^2\sin(\alpha+\beta).$$

建议本节参看附录(A)中的照片 3.

***(四) 施瓦茨－克里斯托弗尔变换及其应用**

在自然界和工程实际问题中，还会出现许多流动区域如图(6.37)所示的由直壁组成的多角形区域. 这类区域中流动通常采用施瓦茨－克里斯托弗尔变换将多角形区域映照到半无限平面来解决.

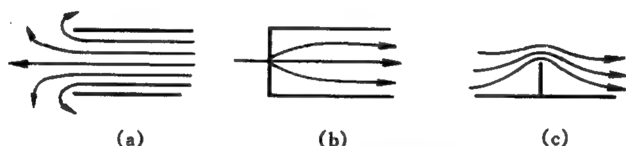


图 6.37 角形区域流动

施瓦茨－克里斯托弗尔变换定义是：

设在 z 平面内有一个 n 角形，其外角分别是 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n$(用弧度来表示)，令

$$z = A\int\frac{d\zeta}{(\zeta-a_1)^{\frac{\theta_1}{\pi}}\cdot(\zeta-a_2)^{\frac{\theta_2}{\pi}}\cdots(\zeta-a_n)^{\frac{\theta_n}{\pi}}} + B, \qquad (6.7.19)$$

式中 A 与 B 为复常数，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是实常数. 关系式(6.7.19)称为施瓦茨－克里斯托弗尔变换，它将这个 n 角形变换为 ζ 平面的上半平面，多角形顶点 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 变换为 ζ 平面实轴上的点 $A_1^*,A_2^*,\cdots,A_n^*$，其坐标分别为 a_1，$a_2,\cdots,a_n$(图 6.38).

这个变换在一般的复变函数教程中都有详细分析，这里不再多作讨论，下面仅指出应用中的几点注意.

(1) $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 和 $A_1^*,A_2^*,\cdots,A_n^*$ 顺序排列对应关系应符合边界与区域的对应关系，通常沿边界顺序行进而区域始终保持在左边.

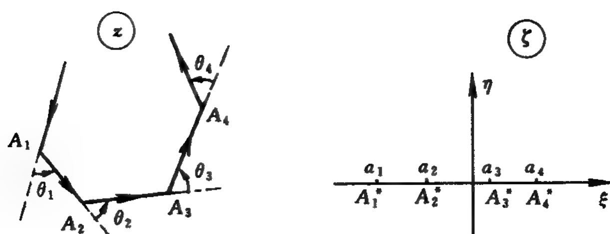


图 6.38　角形周界映照为直线

(2) 两条平行线可以看作在无穷远处相交,外角为 π.

(3) 应用中常将某点映照到 ζ 平面实轴上无穷远处,即规定 a_i 为∞,此时(6.7.19)中含 a_i 的因子自动消失.

(4) 在(6.7.19)中有 $n+2$ 个常数,$A,B,a_1,a_2,\cdots,a_n$,可以预先规定好 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中的任意 3 个,另外 $n-1$ 个常数由具体边界条件和流动边界条件加以确定.

下面以几个具体例子来说明施瓦茨－克里斯托弗尔变换在求解多角形域内流动问题中的应用.

例 6.12　求图 6.39 中各半无限长渠道内的流动.

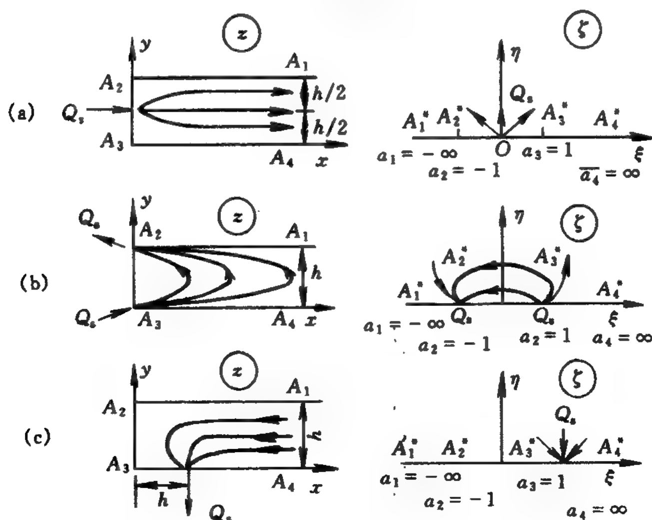


图 6.39　半无限长渠道内流动

解　利用施瓦茨－克里斯托弗尔变换函数将半无限长区域映照到上半平面. 下面列出对应点的关系:

z	A_1	A_2	A_3	A_4
z 坐标	$\infty+\mathrm{i}h$	$\mathrm{i}h$	0	∞
θ	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π
ζ	A_1^*	A_2^*	A_3^*	A_4^*
ζ 坐标	$-\infty$	-1	1	$+\infty$

根据所列对应点的关系，变换式(6.7.19)是

$$z = A\int\frac{\mathrm{d}\zeta}{\sqrt{(\zeta+1)(\zeta-1)}} + B = A\operatorname{ch}^{-1}\zeta + B.$$

式中待定系数 A 和 B 可以利用 z 平面上 A_2, A_3 和 ζ 平面上 A_2^*, A_3^* 的对应关系来确定. 可以写出两个关系式

$$\mathrm{i}h = A\operatorname{ch}^{-1}(-1) + B = A\pi\mathrm{i} + B,$$

$$0 = A\operatorname{ch}^{-1}1 + B = B,$$

于是有

$$A = \frac{h}{\pi},\quad B = 0.$$

因此变换式可最后表示为

$$z = \frac{h}{\pi}\operatorname{ch}^{-1}\zeta,$$

或

$$\zeta = \operatorname{ch}\frac{\pi}{h}z.$$

它将 z 平面上半无限长渠道的边界变换为 ζ 平面上的实轴，渠道内的区域变换为 ζ 平面的上半平面.

现在就可以求图 6.39 中几个流动的复势.

(1) 图 6.39(a)边界 A_2A_3 上 $z=\mathrm{i}\frac{h}{2}$ 处有一个强度为 Q_s 的源. $z=\mathrm{i}\frac{h}{2}$ 的对应点是

$$\zeta = \operatorname{ch}\frac{\pi}{h}\cdot\left(\mathrm{i}\frac{h}{2}\right) = 0.$$

因此在 ζ 平面上，在实轴的 $\zeta=0$ 处有一个强度为 Q_s 的源，则上半平面流动复势是

$$W^*(\zeta) = \frac{2Q_s}{2\pi}\ln\zeta = \frac{Q_s}{\pi}\ln\zeta,$$

物理平面 z 上，半无限长渠道内的流动复势是

$$W(z) = \frac{Q_s}{\pi}\ln\left(\operatorname{ch}\frac{\pi}{h}z\right),$$

复速度是
$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}=\frac{Q_s}{\pi}\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{h}z}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{h}z}\cdot\frac{\pi}{h}=\frac{Q_s}{h}\operatorname{th}\frac{\pi}{h}z.$$

(2) 图 6.39(b)角点 A_3 处有一强度为 Q_s 的源，在角点 A_2 处有一强度为 Q_s 的汇. 根据对应关系，在 ζ 平面上，ζ 轴的 A_2^* 处有一强度 Q_s 的汇，A_3^* 处有一强度 Q_s 的源，其复势是

$$W^*(\zeta)=\frac{2Q_s}{2\pi}\ln(\zeta-1)-\frac{2Q_s}{2\pi}\ln(\zeta+1)$$
$$=\frac{Q_s}{\pi}\ln\left(\frac{\zeta-1}{\zeta+1}\right).$$

因此在物理平面 z 上，半无限长渠道内的流动复势是

$$W(z)=\frac{Q_s}{\pi}\ln\left[\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{h}z-1}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{h}z+1}\right].$$

(3) 图 6.39(c)边界 A_3A_2 上 $z=h$ 处有一强度为 Q_s 的汇. $z=h$ 的对应点是

$$\zeta=\operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{h}\cdot h\right)=\operatorname{ch}\pi.$$

因此在 ζ 平面上，在实轴 $\zeta=\operatorname{ch}\pi$ 处有一强度为 Q_s 的汇，则上半平面流动复势是

$$W^*(\zeta)=-\frac{2Q_s}{2\pi}\ln(\zeta-\operatorname{ch}\pi)$$
$$=-\frac{Q_s}{\pi}\ln(\zeta-\operatorname{ch}\pi).$$

物理平面上，半无限长渠道内的流动复势是

$$W(z)=-\frac{Q_s}{\pi}\ln\left(\operatorname{ch}\frac{\pi}{h}z-\operatorname{ch}\pi\right).$$

应当注意，直线边界上有一强度为 Q_s 的源，流体全部流入该边界一侧区域时，可以认为若无边界时，该处实际源强是 $2Q_s$.

例 6.13 求无限长渠道内的流动.

解 图 6.40 所示无限长渠道内流动情况，可以用例 6.12 的类似方法处理. 首先应找出具体的施瓦茨 - 克里斯托弗尔变换函数.

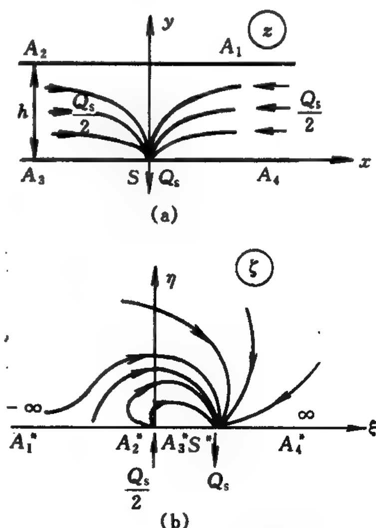


图 6.40 无限长渠道内流动

z	A_1	A_2	A_3	A_4
z 坐标	$\infty+\mathrm{i}h$	$-\infty+\mathrm{i}h$	$-\infty$	∞
θ	π	π	π	π
ζ	A_1^*	A_2^*	A_3^*	A_4^*
ζ 坐标	$-\infty$	0	0	$-\infty$

根据所列对应点的关系,变换式(6.7.19)是

$$z = A\int \frac{\mathrm{d}\zeta}{\sqrt{\zeta^2}} + B = A\ln \zeta + B.$$

式中待定系数 A 和 B 可以这样来确定:渠道下边界上有一点可以对应于 ζ 平面上正实轴的任意一处,设 $z=0$ 对应 $\zeta=1$;又对于渠道上边界上任一点 $z=x+\mathrm{i}h$,应对应于 ζ 平面上负实轴上的点 $\zeta=|\zeta|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$. 这样可以列出两个关系式

$$0= A\ \ln 1 + B = B,$$

$$x+\mathrm{i}h = A\ \ln(|\zeta|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}) + B = A\ \ln|\zeta| + A\pi\mathrm{i} + B,$$

于是有

$$A=\frac{h}{\pi},\quad B=0.$$

因此具体变换函数式是

$$z = \frac{h}{\pi}\ln \zeta,$$

或

$$\zeta=\mathrm{e}^{\frac{\pi z}{h}}.$$

这个变换式将图示的无限长渠道变换至 ζ 平面的上半平面. 渠道边界上 $z=0$ 处有一强度为 Q_s 的汇,对应于 ζ 平面实轴上 $\zeta=1$ 处有一强度为 Q_s 的汇. 这里还应特别注意渠道上 A_2 和 A_3 两点的对应点,它们都对应于 ζ 平面实轴上 $\zeta=0$ 这一点. 由于渠道是无限长的,汇在 $z=0$ 处,因此流动以 y 轴为对称轴,所以有一半流量 $Q_s/2$ 分别从渠道左右两端无穷远处向 $z=0$ 流来,反映在 ζ 平面上,A_2^*、A_3^* 处是一个强度为$\frac{Q_s}{2}$的源流入上半平面. 这样 ζ 平面上半面的流动复势是

$$W^*(\zeta)=\frac{2\cdot\frac{Q_s}{2}}{2\pi}\ln \zeta - \frac{2Q_s}{2\pi}\ln(\zeta-1)$$

$$=\frac{Q_s}{\pi}\ln\left(\frac{\zeta^{\frac{1}{2}}}{\zeta-1}\right)=-\frac{Q_s}{\pi}\ln(\zeta^{\frac{1}{2}}-\zeta^{-\frac{1}{2}}).$$

物理平面 z 上,无限长渠道内流动复势是

$$W(z)=-\frac{Q_s}{\pi}\ln(\mathrm{e}^{\frac{\pi z}{2h}}-\mathrm{e}^{-\frac{\pi z}{2h}})$$

$$= -\frac{Q_s}{\pi}\ln\left(2\text{sh}\,\frac{\pi z}{2h}\right)$$

$$= -\frac{Q_s}{\pi}\ln\left(\text{sh}\,\frac{\pi z}{2h}\right) + \text{const}.$$

上式中常数项对流动无影响,故流动复势为

$$W(z) = -\frac{Q_s}{\pi}\ln\left(\text{sh}\,\frac{\pi z}{2h}\right).$$

6.8　无粘性不可压缩流体的空间轴对称流动

不可压缩流体的空间轴对称流动是一种常见的流动形式,前面已经简单介绍,并且引进了斯托克斯流函数 ψ. 这一节将对这一流动进行讨论.

(一) 基本流动

1. 均匀流

在空间中有速度为 V_∞,且平行于 z 轴的均匀流,在柱坐标系中,流场的速度分量是

$$v_z = V_\infty,$$

$$v_r = v_\lambda = 0.$$

这个流动显然是无旋轴对称的,存在速度势函数 φ 和流函数 ψ,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = v_z = V_\infty, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = v_r = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = v_\lambda = 0,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -rv_r = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = rv_z = rV_\infty, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = 0.$$

在略去对速度场无影响的任意常数项之后,由上面几式积分可求出流函数 ψ 和速度势函数 φ,

$$\varphi = V_\infty z, \tag{6.8.1}$$

$$\psi = \frac{1}{2}V_\infty r^2. \tag{6.8.2}$$

利用柱坐标与球坐标之间的转换关系

$$z = R\cos\theta, \quad r = R\sin\theta,$$

由关系式(6.8.1)和(6.8.2)求得球坐标系中均匀流的速度势函数和流函数,

$$\varphi = V_\infty R\cos\theta, \tag{6.8.3}$$

$$\psi = \frac{1}{2}V_\infty R^2\sin^2\theta. \tag{6.8.4}$$

2. 点源(汇)

在坐标原点有一强度为 Q_s 的点源，取球坐标系，显然仅有径向流动. 再取一个球心在原点，半径为 R 的圆球包围点源，则可由流量守恒原理知 $Q_s = v_R \cdot 4\pi R^2$，因而

$$v_R = \frac{Q_s}{4\pi R^2}.$$

由于

$$v_R = \frac{\partial \varphi}{\partial R} = \frac{1}{R^2 \sin\theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta},$$

$$v_\theta = \frac{1}{R}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial \psi}{\partial R},$$

则得势函数 φ 是

$$\varphi = -\frac{Q_s}{4\pi R}, \tag{6.8.5}$$

流函数是

$$\psi = \int \frac{Q_s}{4\pi R^2} \cdot R^2 \sin\theta d\theta = -\frac{Q_s}{4\pi}\cos\theta. \tag{6.8.6}$$

利用柱坐标与球坐标之间转换关系，可求得在柱坐标系中速度势函数 φ 和流函数 ψ 是

$$\varphi = -\frac{Q_s}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}, \tag{6.8.7}$$

$$\psi = -\frac{Q_s}{4\pi}\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}. \tag{6.8.8}$$

3. 偶极子

和平面偶极子一样，在空间流中等强度点源和点汇构成空间偶极子.

设在 z 轴上分别有 Q_s 和 $-Q_s$ 的点源和点汇，两者相距 δs(图 6.41). 采用球坐标系，空间一点 P 的速度势将为

$$\varphi = -\frac{Q_s}{4\pi}\frac{1}{R+\delta R} + \frac{Q_s}{4\pi}\frac{1}{R}$$

$$= \frac{Q_s}{4\pi} \cdot \frac{\delta R}{R(R+\delta R)}.$$

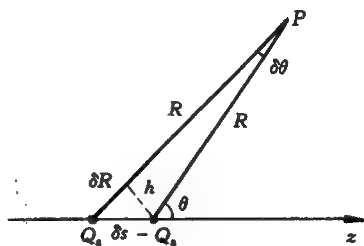


图 6.41 相距 δs 的点源和点汇

由于

$$\delta R = \delta s \cdot \cos(\theta - \delta\theta),$$

并且假定有

$$\lim_{\substack{\delta s \to 0 \\ Q_s \to \infty}} \frac{Q_s}{4\pi} \cdot \delta s = \widetilde{M}_t,$$

因而速度势 φ 在 $\delta s \to 0$ 时为

$$\varphi = \widetilde{M}_t \frac{\cos\theta}{R^2}. \tag{6.8.9}$$

这就是位于坐标原点，其方向(由汇到源)指向负 z 轴方向，强度为 $\widetilde{M}_t$ 的空间偶极子所产生流动的速度势函数.

流函数是

$$\begin{aligned}\psi &= -\frac{Q_s}{4\pi}\cos(\theta - \delta\theta) + \frac{Q_s}{4\pi}\cos\theta \\ &= \frac{Q_s}{4\pi}(\cos\theta - \cos\theta\cos\delta\theta - \sin\theta\cdot\sin\delta\theta),\end{aligned}$$

注意到，当 $\delta s \to 0$ 时有

$$\sin\delta\theta \approx \frac{h}{R} \approx \frac{\delta s\cdot\sin\theta}{R},$$

$$\cos\delta\theta \approx 1,$$

因此

$$\psi = -\frac{Q_s}{4\pi}\frac{\delta s\cdot\sin^2\theta}{R} \to -\widetilde{M}_t\frac{\sin^2\theta}{R}. \tag{6.8.10}$$

在柱坐标系中，这个偶极子的势函数和流函数则是

$$\varphi = \widetilde{M}_t\frac{z}{(z^2 + r^2)^{3/2}}, \tag{6.8.11}$$

$$\psi = -\widetilde{M}_t\frac{r^2}{(z^2 + r^2)^{3/2}}. \tag{6.8.12}$$

无论是平面情况，还是三维情况，偶极子的本质就是联接在一起的点源和点汇. 设想有一个细长的棒状物体，截面是圆周，面积 a，两端是半球状，在流体中沿棒轴向以匀速 V 运动(图 6.42(a)). 在物体的前端，由于物体向前运动不断挤压流体，使流体排开，因而在瞬时其前端点起了点源的作用. 在物体的后端，由于物体离去，在流体中将出现空间，四周流体就迅速向该处流来以填补此空间，因而在瞬时其后端点起了点汇的作用. 至于棒的本身则相当于一条直流线，连接了这对点源和点汇. 根据已给出的条件，点源(汇)的强度是 $Q_s = aV$，于是上述流体运动的势函数是

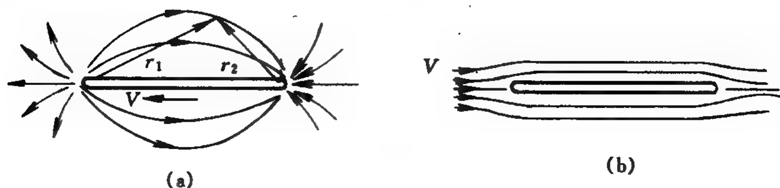


图 6.42　棒在流体中运动

$$\varphi = \frac{aV}{4\pi}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right).$$

如果建立固连在棒上的动坐标，则相对运动就是定常运动(图 6.42(b))．当这根棒越来越短，最后成为一个球体，这对点源和点汇就成为偶极子.

4．线源(汇)

设在 z 轴上自原点出发的长为 l_1 的线段上连续分布着强度相等的点源，这通常称为线源(图 6.43)．单位长度线源上流量设为 q，线源微元 δl 所产生的流动流函数则是

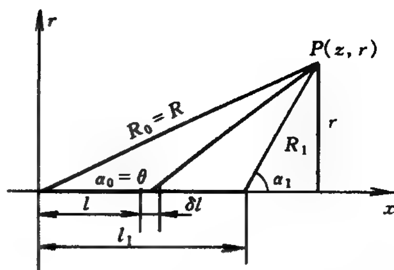


图 6.43 线源

$$\delta\psi = -\frac{q\delta l}{4\pi}\cos\alpha.$$

因此整个线源所产生的流动流函数是

$$\psi = \int_0^{l_1}\delta\psi = -\frac{q}{4\pi}\int_0^{l_1}\cos\alpha \mathrm{d}l.$$

由于 $$z - l = r\cot\alpha,$$

即 $$\mathrm{d}l = r\csc^2\alpha\cdot\mathrm{d}\alpha,$$

因此

$$\begin{aligned}\psi &= -\frac{q}{4\pi}\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} r\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\mathrm{d}\alpha \\ &= -\frac{q}{4\pi}r\left(\frac{1}{\sin\alpha_0} - \frac{1}{\sin\alpha_1}\right) \\ &= -\frac{q}{4\pi}(R - R_1).\end{aligned} \tag{6.8.13}$$

同样也可求得速度势函数 φ 是

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{l_1}\frac{q(l)\mathrm{d}l}{\sqrt{(z-l)^2 + r^2}}. \tag{6.8.14}$$

(二) 定常无旋绕流问题

无粘性不可压缩流体作空间轴对称定常无旋流问题既可以通过速度势函数 φ 来求解，也可以通过流函数 ψ 来求解．速度势函数 φ 满足的是拉普拉斯方程，而流函数 ψ 满足的不是拉普拉斯方程，因此不能像平面问题那样引进复势函数来求解.

由于流函数不满足拉普拉斯方程，解起来就比较困难，因而如果从解微分方程着手，那么通常是解拉普拉斯方程，求出速度势函数 φ.

另一方面，速度势函数 φ 与流函数 ψ 所满足的方程都是线性的，根据线性

迭加原理，方程解的线性组合依然是原方程的解．我们已讨论了轴对称无旋流的一些基本流动，他们的流函数和势函数都是流函数和势函数所满足方程的基本解，因而可以适当的组合，构成所属的流场．

下面是几个具体的例子，分别说明了上述两种方法的应用．

1．圆球绕流问题

无穷远处速度为 V_∞ 的均匀来流不脱体绕过半径为 a 的圆球，求解流场(图 6.44)．

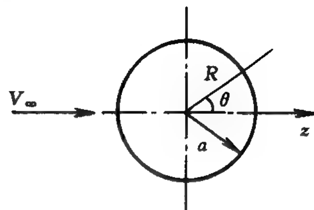


图 6.44　圆球定常绕流

这一流动显然是轴对称的，并且是无旋的．建立球坐标如图所示，用两种方法来求解．

解一：奇点迭加法．

可以想象到，圆球绕流可以由均匀来流与偶极子组合而成．设均匀来流速度为 V_∞，与 z 轴平行，偶极子置于坐标原点，强度是 $\widetilde{M}_t$．

将关系式(6.8.3)、(6.8.4)、(6.8.9)、(6.8.10)组合得到

$$\varphi = \widetilde{M}_t \frac{\cos\theta}{R^2} + V_\infty R\cos\theta, \tag{6.8.15}$$

$$\psi = -\widetilde{M}_t \frac{\sin^2\theta}{R} + \frac{1}{2} V_\infty R^2 \sin^2\theta, \tag{6.8.16}$$

流场的速度是

$$v_R = \frac{\partial\varphi}{\partial R} = -\frac{2\widetilde{M}_t \cos\theta}{R^3} + V_\infty \cos\theta, \tag{6.8.17}$$

$$v_\theta = \frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -\frac{\widetilde{M}_t \sin\theta}{R^3} - V_\infty \sin\theta. \tag{6.8.18}$$

驻点的位置由 $v_R = 0, v_\theta = 0$ 求得为 $\theta_{s1} = 0, R_{s1} = \left(\frac{2\widetilde{M}_t}{V_\infty}\right)^{1/3}$ 和 $\theta_{s2} = \pi, R_{s2} = \left(\frac{2\widetilde{M}_t}{V_\infty}\right)^{1/3}$，流面是

$$\psi = -\widetilde{M}_t \frac{\sin^2\theta}{R} + \frac{1}{2} V_\infty R^2 \sin^2\theta = c \quad (\text{常数}), \tag{6.8.19}$$

过驻点的流面是零流面 $\psi_s = 0$，即

$$-\frac{\widetilde{M}_t \sin^2\theta}{R} + \frac{1}{2} V_\infty R^2 \sin^2\theta = 0,$$

由此得

$$\sin^2\theta = 0,$$

$$-\frac{\widetilde{M}_t}{R} + \frac{1}{2} V_\infty R^2 = 0,$$

解得 $\theta = 0, \theta = \pi$ 以及 $R = \left(\frac{2\widetilde{M}_t}{V_\infty}\right)^{1/3}$．这说明 z 轴是流线，同时半径为 $\left(\frac{2\widetilde{M}_t}{V_\infty}\right)^{1/3}$

的圆球面是流面. 这样,对于无穷远处速度为 V_∞ 的均匀来流绕过半径为 a 的圆球,可以由均匀来流 V_∞ 和位于原点的偶极矩为 $\widetilde{M}_t=\dfrac{V_\infty a^3}{2}$ 的偶极子迭加而成.

现在确定流动参量.

速度势和流函数是

$$\varphi= V_\infty\cos\theta\left(R+\frac{a^3}{2R^2}\right), \tag{6.8.20}$$

$$\psi=\frac{1}{2}V_\infty\sin^2\theta\left(R^2-\frac{a^3}{R}\right), \tag{6.8.21}$$

流场速度分布是

$$v_R=\frac{\partial\varphi}{\partial R}=V_\infty\cos\theta\left(1-\frac{a^3}{R^3}\right), \tag{6.8.22}$$

$$v_\theta=\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=-V_\infty\sin\theta\left(1+\frac{a^3}{2R^3}\right), \tag{6.8.23}$$

在球面 $R=a$ 上,

$$v_R=0,\quad v_\theta=-\frac{3}{2}V_\infty\sin\theta,$$

$$v=\sqrt{v_R^2+v_\theta^2}=\frac{3}{2}V_\infty|\sin\theta|.$$

球面上压强分布由伯努利方程求得,

$$p=p_\infty+\frac{1}{2}\rho V_\infty^2-\frac{1}{2}\rho v^2=p_\infty+\frac{1}{2}\rho V_\infty^2\left(1-\frac{9}{4}\sin^2\theta\right). \tag{6.8.24}$$

压强系数是

$$c_p=\frac{p-p_\infty}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2}=1-\frac{9}{4}\sin^2\theta. \tag{6.8.25}$$

最小压强在 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 处,

$$p_{\min}=p_\infty-\frac{5}{8}\rho V_\infty^2.$$

由于压强分布是对称的,作用在球面上压力相互平衡,流动阻力为零,这即为圆柱绕流中所说的达朗伯佯谬.

解二:用变量分离法解拉普拉斯方程.

不可压缩流体的无旋运动势函数 φ 满足拉普拉斯方程. 可以把流动看作两部分的迭加,一部分是无小球时的均匀来流,速度势 $\varphi=V_\infty R\cos\theta$,另一部分是圆球对流场的干扰,速度势设为 φ',因此圆球绕流的速度势 φ 是

$$\varphi = V_\infty R\cos\theta + \varphi'.$$

根据线性迭加原理,φ'也应满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\varphi'}{\partial R}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi'}{\partial\theta}\right)=0, \tag{6.8.26}$$

并有边界条件:

在 $R=a$ 处,

$$v_R=0,\quad 即\ \frac{\partial\varphi'}{\partial R}=-V_\infty\cos\theta;$$

在无穷远处,

$$v_R=V_\infty,\quad 即\ \frac{\partial\varphi'}{\partial R}=0.$$

采用变量分离法,设

$$\varphi'=-P(R)\cos\theta,$$

代入(6.8.26)式及边界条件,得到

$$R^2\frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}R^2}+2R\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}R}-2P=0, \tag{6.8.27}$$

$$P'(a)=V_\infty,\quad P'(\infty)=0.$$

(6.8.27)是欧拉方程,有解

$$P(R)=-\frac{V_\infty a^3}{2R^2},$$

$$\varphi'=\frac{V_\infty a^3\cos\theta}{2R^2}.$$

圆球绕流问题速度势 φ 为

$$\varphi=V_\infty R\cos\theta\left(1+\frac{a^3}{2R^3}\right),$$

这也就是(6.8.20)式. 求速度,压强分布已在上面介绍过了,这里不再重复. 上面把 φ 分成两部分解,实际上也可直接求 φ,得出上式,读者不妨一试.

圆球绕流问题和圆柱绕流一样,存在着达朗伯佯谬:流动阻力为零. 这显然是错误的. 实际上真实流体有粘性,因此存在粘性阻力. 同时,粘性影响使得流场发生变化,尤其圆球后半部将出现脱体区,在此区内流体充满了旋涡,压强发生了变化,并形成压差阻力. 因而上述把流体作为无粘性的来处理,其结果与实际结果相差较大.

2. 零冲角回转体绕流问题

零冲角回转体绕流问题可以用奇点迭加法来求解. 奇点迭加法已在平面问题中作过讨论,在圆球绕流问题中也用了这一方法. 应该注意到,在迄今所曾用的奇点迭加法中,都是预先设置了一系列已知的奇点,加以迭加,然后考察这是

哪一种物体绕流的流场．这样一类问题通常称为反问题，下面先以半体绕流的例子来说明这一方法的应用．但是大量实际问题却与此相反，物体形状是预先给定的，需要选择一系列基本流动加以迭加，使所得的复势函数满足给定物体的边界条件，这样的复势函数就是问题的解．这一类问题通常称为正问题，使它与反问题区别开来．第二个例子将以一个零冲角回转体绕流问题来说明奇点迭加法在解正问题中的应用．

(1) 半体绕流

设一个均匀来流，速度为 V_∞，方向与 z 轴平行；另外在原点放置一个强度为 Q_s 的点源，它们构成了组合流场．

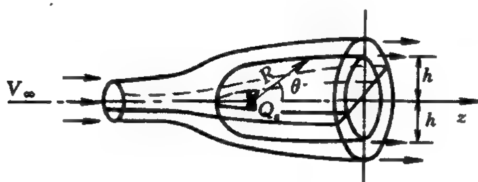


图 6.45 半体定常绕流

组合流场的速度势 φ 和流函数 ψ 是

$$\varphi = V_\infty R\cos\theta - \frac{Q_s}{4\pi R}, \tag{6.8.28}$$

$$\psi = \frac{1}{2} V_\infty R^2\sin^2\theta - \frac{Q_s}{4\pi}\cos\theta. \tag{6.8.29}$$

流面是

$$\frac{1}{2} V_\infty R^2\sin^2\theta - \frac{Q_s}{4\pi}\cos\theta = c. \tag{6.8.30}$$

现在求过驻点的流面，即要确定参数 c 的值 c_s．因为

$$v_R = \frac{\partial\varphi}{\partial R} = V_\infty\cos\theta + \frac{Q_s}{4\pi}\frac{1}{R^2}, \tag{6.8.31}$$

$$v_\theta = \frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = - V_\infty\sin\theta, \tag{6.8.32}$$

令 $v_R = 0, v_\theta = 0$，就可解出驻点坐标

$$\theta_s = \pi, \quad R_s = \sqrt{\frac{Q_s}{4\pi}\frac{1}{V_\infty}},$$

代入(6.8.30)式，求得 $c_s = \dfrac{Q_s}{4\pi}$，过驻点的流面就是

$$\frac{1}{2}V_\infty R^2\sin^2\theta - \frac{Q_s}{4\pi}\cos\theta = \frac{Q_s}{4\pi}. \tag{6.8.33}$$

因而由点源和均匀流组合成图 6.45 所示半体头部的绕流，半体方程就是(6.8.33)式，或写成

$$R=\sqrt{\frac{Q_s}{4\pi V_\infty}}\csc\frac{\theta}{2}. \tag{6.8.34}$$

当 $x\to\infty$ 时($\theta\to 0$)，有极限半径 h 存在，

$$h=2\sqrt{\frac{Q_s}{4\pi V_\infty}}=2R_s. \tag{6.8.35}$$

流场中压强分布由伯努利方程求得. 压强系数是

$$C_p=\frac{p-p_\infty}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2}=1-\frac{v^2}{V_\infty^2}=1-\frac{v_R^2+v_\theta^2}{V_\infty^2}.$$

把(6.8.31)和(6.8.32)两式代入得

$$C_p=-\frac{Q_s}{4\pi R^2 V_\infty}\left(\frac{Q_s}{4\pi R^2 V_\infty}+2\cos\theta\right). \tag{6.8.36}$$

特别在半体表面上，压力系数是

$$C_p=\frac{Q_s}{4\pi}\frac{1}{V_\infty R^2}\left(\frac{3Q_s}{4\pi V_\infty R^2}-2\right).$$

这是一个用奇点迭加法解反问题的例子，大家应是熟悉的.

(2) 零冲角回转体绕流

设有一个对称回转体，在过对称轴 z 平面上的边线方程是 $r=R(z)$. 无穷远处有速度 V_∞ 的均匀来流沿 z 轴方向绕过此回转体. 这个问题和先前遇到的不同，物体形状是确定的，如果用奇点迭加法，则需要确定奇点的类型及强度. 根据物体形状和流动状况，回转体起了对称地排开流体的作用，因而可以考虑在 z 轴的 AB 段设置连续分布的源汇. 设单位长度上源强 $q(\xi)$，则任一线元素 $d\xi$ 上强度是 $q(\xi)d\xi$. 均匀来流和线源迭加后组合流场的速度势是

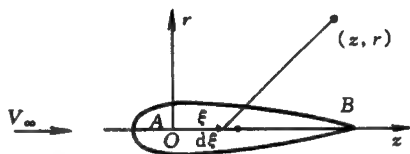


图 6.46　回转体零攻角绕流

$$\varphi=V_\infty z-\frac{1}{4\pi}\int_A^B\frac{q(\xi)d\xi}{\sqrt{(z-\xi)^2+r^2}} \tag{6.8.37}$$

显然它是满足无穷远处边界条件的. 另一个边界条件是在物面上流体速度方向和物面切向一致，

$$\frac{v_r}{v_z}=\frac{dR(z)}{dz}. \tag{6.8.38}$$

由这一条件可以确定出线源强度 $q(\xi)$. 求法是这样的：先求出速度分量，是

$$v_r = \frac{r}{4\pi}\int_A^B \frac{q(\xi)\mathrm{d}\xi}{[(z-\xi)^2 + r^2]^{3/2}},$$

$$v_z = V_\infty + \frac{1}{4\pi}\int_A^B \frac{(z-\xi)q(\xi)\mathrm{d}\xi}{[(z-\xi)^2 + r^2]^{3/2}},$$

再代入(6.8.38)有

$$\frac{r}{4\pi}\int_A^B \frac{q(\xi)\mathrm{d}\xi}{[(z-\xi)^2 + r^2]^{3/2}} = \frac{\mathrm{d}R(z)}{\mathrm{d}z}\left\{V_\infty + \frac{1}{4\pi}\int_A^B \frac{(z-\xi)q(\xi)}{[(z-\xi)^2 + r^2]^{3/2}}\right\}, \tag{6.8.39}$$

由这个积分方程求出源强 $q(\xi)$,再回代入(6.8.37)式就得到了零冲角回转体绕流的速度势.

这样的方法不仅用来解无冲角回转体绕流问题,也适用于许多其他绕流问题. 根据问题的性质,可以布源汇,也可以布汇和偶极子;可以在绕物体内部布奇点,也可在物体表面布奇点,这就是通常所称的有限基本解方法. 随着高速电子计算机与计算技术的发展,积分方程(6.8.39)可得到满意的数值结果.

(三) 非定常圆球绕流问题　附加质量

前面所讨论的都是定常流动问题,风速不变的气流绕过建筑物的运动,风洞中机翼绕流实验时的气流运动等等,都是属于定常流动问题;物体在静止流体中作匀速直线运动时,可以应用迭加原理,因此也可归入定常流动问题. 但实际上,还存在大量非定常问题,现在我们分析圆球作变速直线运动的情况,对非定常问题作简单的介绍.

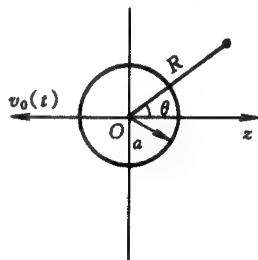


图 6.47　圆球在静止流体中变速直线运动

一个半径为 a 的圆球以速度 $v_0(t)$ 在静止流体中沿 x 轴负方向作直线运动,如图 6.47 所示. 取固连在圆球上的坐标系,以这个运动坐标系来研究流体的绝对运动.

流体的运动是由于圆球直线运动引起的,因此运动无旋,有速度势函数 $\varphi(R,\theta,\lambda;t)$ 存在. 对于无粘性不可压缩流体来说,势函数 φ 仍然满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) = 0,$$

边界条件是

在球面上,

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right|_{R=a} = -v_0\cos\theta,$$

在无穷远处,

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial R}\right|_{R=\infty} = 0.$$

这个问题的求解与圆球定常绕流问题的解法基本上是一样的. 利用变量分离法,设 $\varphi = -P(R)\cos\theta$,代入方程,在所给定的边界条件下求得

$$P(R) = -\frac{v_0 a^3}{2R^2},$$

于是圆球运动所对应的流体绝对运动速度势为

$$\varphi = \frac{v_0 a^3}{2R^2}\cos\theta. \tag{6.8.40}$$

可以看到,流动的非定常性在方程中并没有直接表现出来,而是反映在边界条件之中,因而最后解(6.8.40)式的形式对于圆球直线运动速度 v_0 是否是时间函数没有什么区别.

流体在运动坐标系中绝对运动速度是

$$v_R = \frac{\partial \varphi}{\partial R} = -\frac{v_0 a^3}{R^3}\cos\theta, \tag{6.8.41}$$

$$v_\theta = \frac{1}{R}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{v_0 a^3}{2R^3}\sin\theta. \tag{6.8.42}$$

特别在圆球表面 $R=a$ 上,流体速度是

$$v_R\Big|_{R=a} = -v_0\cos\theta, \tag{6.8.43}$$

$$v_\theta\Big|_{R=a} = -\frac{v_0}{2}\sin\theta. \tag{6.8.44}$$

流场的压强可以用伯努利方程求得. 但是由于运动的非定常性,所采用的坐标系又是运动坐标系,就不像求速度势和速度分布那样简单了. 为此,要导出运动坐标系中描述绝对运动的伯努利方程.

* 运动坐标系中流体绝对运动的伯努利方程

在静止坐标系中,无粘性不可压缩流体绝对运动遵循欧拉运动方程

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t} = \boldsymbol{F}_\mathrm{b} - \frac{1}{\rho}\nabla p.$$

由于绝对加速度是牵连加速度、相对加速度和科里奥利加速度之和,欧拉方程可写成

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}'\boldsymbol{v}_\mathrm{r}}{\mathrm{D}t} &= -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{F}_\mathrm{b} - \boldsymbol{a}_\mathrm{e} - 2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}_\mathrm{r} \\ &= -\frac{1}{\rho}\nabla' p + \boldsymbol{F}_\mathrm{b} - \boldsymbol{a}_\mathrm{e} - 2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}_\mathrm{r},\end{aligned}$$

或 $$\frac{\partial' \boldsymbol{v}_r}{\partial t}+(\boldsymbol{v}_r\cdot\nabla')\boldsymbol{v}_r=-\frac{1}{\rho}\nabla' p+\boldsymbol{F}_b-\boldsymbol{a}_e-2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}_r,$$

式中“′”表示在运动坐标系中求导. 其兰姆形式则是

$$\frac{\partial' \boldsymbol{v}_r}{\partial t}+\nabla'\left(\frac{v_r^2}{2}\right)-\boldsymbol{v}_r\times\mathrm{rot}'\boldsymbol{v}_r$$

$$=-\frac{1}{\rho}\nabla' p+\boldsymbol{F}_b-\boldsymbol{a}_e-2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}_r. \tag{6.8.45}$$

进一步考虑牵连速度所满足的方程. 由于牵连运动反映的是坐标系的运动,与流体运动无关,不失一般性,可以考察流体绝对静止情况. 此时

$$\boldsymbol{v}=0,\quad \boldsymbol{F}_b-\frac{1}{\rho}\nabla p=0,$$

即 $$\boldsymbol{v}_r=-\boldsymbol{v}_e,\quad \boldsymbol{F}_b-\frac{1}{\rho}\nabla' p=0.$$

代入(6.8.45)式就得到牵连速度方程,尽管它在特殊情况下导得,但具有普适性,

$$\frac{\partial' \boldsymbol{v}_e}{\partial t}-\nabla'\left(\frac{v_e^2}{2}\right)+\boldsymbol{v}_e\times\mathrm{rot}'\boldsymbol{v}_e+2(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}_e)=\boldsymbol{a}_e. \tag{6.8.46}$$

把上式和(6.8.45)式相加得到

$$\frac{\partial' \boldsymbol{v}}{\partial t}+\nabla'\frac{1}{2}(v_r^2-v_e^2)-\boldsymbol{v}_r\times\mathrm{rot}'\boldsymbol{v}_r+\boldsymbol{v}_e\times\mathrm{rot}'\boldsymbol{v}_e+2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}$$

$$=\boldsymbol{F}_b-\frac{1}{\rho}\nabla' p. \tag{6.8.47}$$

由于 $$v_r^2-v_e^2=(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_e)\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_e)-v_e^2=v^2-2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}_e,$$

$$\mathrm{rot}'\boldsymbol{v}_e=\mathrm{rot}'(\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})=2\boldsymbol{\Omega},$$

$$\boldsymbol{v}_e\times\mathrm{rot}'\boldsymbol{v}_e=2\boldsymbol{v}_e\times\boldsymbol{\Omega},$$

$$\boldsymbol{v}_r\times\mathrm{rot}'\boldsymbol{v}_r=\boldsymbol{v}_r\times\mathrm{rot}'(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_e)$$

$$=(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_e)\times\mathrm{rot}'\boldsymbol{v}-2\boldsymbol{v}_r\times\boldsymbol{\Omega}.$$

把这些表达式代入(6.8.47)式后就得到了运动坐标系中流体绝对运动的方程为

$$\frac{\partial' \boldsymbol{v}}{\partial t}+\nabla'\left(\frac{v^2}{2}-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}_e\right)-(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_e)\times\mathrm{rot}'\boldsymbol{v}=\boldsymbol{F}_b-\frac{1}{\rho}\nabla' p. \tag{6.8.48}$$

流体作无旋运动时,$\mathrm{rot}\boldsymbol{v}=0$,同样有 $\mathrm{rot}'\boldsymbol{v}=0$,(6.8.48)式简化成

$$\frac{\partial' \boldsymbol{v}}{\partial t}+\nabla'\left(\frac{v^2}{2}-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}_e\right)=\boldsymbol{F}_b-\frac{1}{\rho}\nabla'_p,$$

若体力有势,流体又是正压,

$$\boldsymbol{F}_b=\nabla'\Pi,\quad \frac{1}{\rho}\nabla' p=\nabla' P,$$

则上一方程进而简化成

$$\frac{\partial' \boldsymbol{v}}{\partial t}+\nabla'\left(\frac{v^2}{2}-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}_e+\Pi+P\right)=0. \tag{6.8.49}$$

由于 $\text{rot}'\boldsymbol{v}=0$,有势函数 φ 存在,使

$$\boldsymbol{v}=\nabla'\varphi,$$

(6.8.49)就可积分得到

$$\frac{\partial'\varphi}{\partial t}+\frac{v^2}{2}-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}_e+\Pi+P=c(t). \tag{6.8.50}$$

这就是无粘性不可压缩正压流体在体力有势情况下,以运动坐标系研究绝对无旋运动的伯努利方程.

回到所讨论的圆球直线运动问题.略去重力影响,认为流体密度不变,并考虑到无穷远处流体静止,(6.8.50)式为

$$\frac{\partial'\varphi}{\partial t}+\frac{v^2}{2}-\boldsymbol{v}_e\cdot\nabla'\varphi+\frac{p}{\rho}=\frac{p_\infty}{\rho}. \tag{6.8.51}$$

为讨论方便,可略去求导时"′"的记号,(6.8.51)式可写为

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{v^2}{2}-\boldsymbol{v}_e\cdot\nabla\varphi+\frac{p}{\rho}=\frac{p_\infty}{\rho}. \tag{6.8.52}$$

将(6.8.40)、(6.8.41)和(6.8.42)代入(6.8.52)式,并注意

$$\boldsymbol{v}_e=-v_0(t)\boldsymbol{e}_z=-v_0(t)(\cos\theta\boldsymbol{e}_R-\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta),$$

伯努利方程(6.8.52)成为

$$\begin{aligned}&\dot{v}_0\frac{a^3}{2R^2}\cos\theta+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{v_0a^3}{R^3}\cos\theta\right)^2+\left(\frac{v_0a^3}{2R^3}\sin\theta\right)^2\right]\\&\quad-v_0(\cos\theta\boldsymbol{e}_R-\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta)\\&\quad\cdot\left(\frac{v_0a^3}{R^3}\cos\theta\boldsymbol{e}_R+\frac{v_0a^3}{2R^3}\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta\right)+\frac{p}{\rho}=\frac{p_\infty}{\rho}.\end{aligned}$$

由此得到流场中压强表达式是

$$\begin{aligned}\frac{p}{\rho}=&\frac{p_\infty}{\rho}-\dot{v}_0\frac{a^3}{2R^2}\cos\theta\\&-\frac{1}{2}\left(\frac{v_0^2a^6}{R^6}\cos^2\theta+\frac{v_0^2a^6}{4R^6}\sin^2\theta\right)\\&+v_0^2\left(\frac{a^3}{R^3}\cos^2\theta-\frac{a^3}{2R^3}\sin^2\theta\right)\end{aligned} \tag{6.8.53}$$

特别在球面上 $R=a$,压强分布是

$$\left.\frac{p}{\rho}\right|_{R=a}=\frac{p_\infty}{\rho}+\frac{v_0^2}{2}\left(1-\frac{9}{4}\sin^2\theta\right)-\frac{a}{2}\dot{v}_0\cos\theta. \tag{6.8.54}$$

如果圆球作匀速直线运动,$\dot{v}_0=0$,则球面上压强是

$$\left.\frac{p}{\rho}\right|_{R=a}=\frac{p_\infty}{\rho}+\frac{v_0^2}{2}\left(1-\frac{9}{4}\sin^2\theta\right), \tag{6.8.55}$$

这和圆球绕流时所得的结果是完全一致的.

根据(6.8.54)式可知压强分布是对称的,流体作用在圆球上的合力 F_f 沿 z 轴方向,

$$\begin{aligned}F_f&=\oint\!\!\!\oint_{R=a}-p\cos\theta\mathrm{d}S\\&=\int_0^\pi-\left[p_\infty+\frac{v_0^2}{2}\rho\left(1-\frac{9}{4}\sin^2\theta\right)-\frac{a}{2}\rho\dot{v}_0\cos\theta\right]\cdot\cos\theta\\&\quad\cdot2\pi a\cos\theta\cdot a\mathrm{d}\theta\\&=\frac{2}{3}\rho\pi a^3\dot{v}_0(t)=\frac{1}{2}M_f\dot{v}_0(t).\end{aligned} \tag{6.8.56}$$

式中 $M_f=\frac{4}{3}\rho\pi a^3$,是圆球排开流体的质量.

小球在无粘不可压缩流体中匀速直线运动或者定常绕流时,流体作用在小球上合力为零. 即为达朗伯佯谬. 然而当小球作非定常运动时,上面的结果说明即使无粘不可压缩流体的无旋运动也将对小球产生阻力,称此为非定常阻力. 从物理上可以这样来理解:由于非定常运动,整个流场的动能随时间变化,它要靠小球对周围流体做功来供给,也就是小球要克服流体所加的阻力来做功. 由于不考虑粘性阻力和压差阻力. 因此现在的阻力完全是由于非定常运动而产生的. 由于这个阻力和加速度 $\dot{v}_0(t)$有关,也称为加速阻力或惯性阻力.

当圆球以速度 $v_0(t)$沿 z 轴负向运动时,动能是

$$K=\frac{1}{2}M_b v_0^2,$$

式中 $M_b=\frac{4}{3}\rho_b\pi a^3$,是圆球质量. 若沿运动方向对圆球其他作用力为 F,则由动能定理

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t}=\sum_i\boldsymbol{F}_i\cdot\boldsymbol{v}$$

得到

$$\begin{aligned}M_b v_0\frac{\mathrm{d}v_0}{\mathrm{d}t}&=(F_f-F)\boldsymbol{e}_z\cdot(-v_0\boldsymbol{e}_z)\\&=-\frac{1}{2}M_f v_0\frac{\mathrm{d}v_0}{\mathrm{d}t}+Fv_0.\end{aligned}$$

因此

$$M_b\frac{\mathrm{d}v_0}{\mathrm{d}t}=F-\frac{1}{2}M_f\frac{\mathrm{d}v_0}{\mathrm{d}t}. \tag{6.8.57}$$

$$\left(M_{\mathrm{b}}+\frac{1}{2} M_{\mathrm{f}}\right) \frac{\mathrm{d} v_{0}}{\mathrm{~d} t}=F. \tag{6.8.58}$$

这个形式如同在质量 M_b 基础上再附加一个$\frac{1}{2}M_f$ 的质量时圆球运动方程，因而$\frac{1}{2}M_f$ 也称为附加质量．附加质量出现是由于运动物体周围流体的存在，对于任何物体在流体中的运动，可导出附加质量的一般形式，本节仅是以圆球为例作一简单的介绍．

例 6.14　求半径为 a 的圆球在无限流场中由于重力而下沉的运动规律．

(1) 不考虑流体阻力作用；

(2) 若圆球运动受阻力

$$D=\frac{1}{2} c_{\mathrm{D}} \rho v_{0}^{2} A.$$

c_D 是阻力系数，$A=\pi a^2$，通常称为迎风面积．

解　(1) 取 z 轴铅垂向下．在下沉方向球受重力作用为 $M_b g$，此外还受浮力作用，为 $M_f g$，方向向上．则圆球下沉速度 $v_0(t)$所满足的方程(6.8.58)为

$$\left(M_{\mathrm{b}}+\frac{1}{2} M_{\mathrm{f}}\right) \frac{\mathrm{d} v_{0}(t)}{\mathrm{d} t}=M_{\mathrm{b}} g-M_{\mathrm{f}} g,$$

则

$$\frac{\mathrm{d} v_{0}(t)}{\mathrm{d} t}=\frac{M_{\mathrm{b}}-M_{\mathrm{f}}}{M_{\mathrm{b}}+\frac{1}{2} M_{\mathrm{f}}} g=\frac{\gamma-1}{\gamma+\frac{1}{2}} g.$$

式中 $\gamma=\frac{\rho_b}{\rho_f}$．当 $\gamma<1$ 时，$\frac{\mathrm{d}v_0(t)}{\mathrm{d}t}<0$，圆球减速运动，如油滴在水中下沉情况；当 $\gamma>1$ 时，$\frac{\mathrm{d}v_0(t)}{\mathrm{d}t}>0$，圆球加速向下，如钢球在水中加速下沉．

(2) 考虑流体阻力．此时圆球下沉速 $v_0(t)$满足

$$\left(M_{\mathrm{b}}+\frac{1}{2} M_{\mathrm{f}}\right) \frac{\mathrm{d} v_{0}(t)}{\mathrm{d} t}=M_{\mathrm{b}} g-M_{\mathrm{f}} g-D.$$

假定圆球一开始是静止的．在下沉初期，速度 $v_0(t)$很小．因

$$D=\frac{1}{2} c_{\mathrm{D}} \rho v_{0}^{2} A,$$

阻力与速度平方成正比，故下沉初期阻力亦很小，圆球将加速下沉．在一段时间后，阻力随下沉速度增大而增大，直到

$$D=M_{\mathrm{b}} g-M_{\mathrm{f}} g.$$

这时将有$\frac{\mathrm{d}v_0(t)}{\mathrm{d}t}=0$，从而 $v_0\equiv v_T$，圆球以恒定速 v_T 下降，v_T 称为终极速度，此时阻力是

$$D = \frac{1}{2} c_{\mathrm{D}} \rho v_{\mathrm{T}}^2 A = M_{\mathrm{b}} g - M_{\mathrm{f}} g.$$

由此可求得终极速度 v_{T} 是

$$v_{\mathrm{T}} = \sqrt{\frac{2(M_{\mathrm{b}} - M_{\mathrm{f}})g}{c_{\mathrm{D}} \rho A}}.$$

我们关心的是从初始时刻到达终极速度期间圆球下沉规律. $v_0(t)$满足

$$\frac{\mathrm{d}v_0(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{M_{\mathrm{b}} g - M_{\mathrm{f}} g - D}{M_{\mathrm{b}} + \frac{1}{2} M_{\mathrm{f}}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} c_{\mathrm{D}} \rho v_{\mathrm{T}}^2 A - \frac{1}{2} c_{\mathrm{D}} \rho v_{(t)}^2 A}{M_{\mathrm{b}} + \frac{1}{2} M_{\mathrm{f}}}.$$

初始条件是 $t=0$ 时, $v_0=0$. 积分上式就可以得到

$$\frac{v_{\mathrm{T}} - v_0(t)}{v_{\mathrm{T}} + v_0(t)} = \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}},$$

式中
$$\tau = \frac{M_{\mathrm{b}} + \frac{1}{2} M_{\mathrm{f}}}{c_{\mathrm{D}} \rho v_{\mathrm{T}} A}.$$

圆球下沉规律如图 6.48 所示,下沉速度以指数规律随时间而增大,最后达到终极速度 v_{T}.

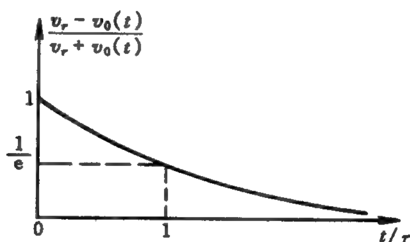


图 6.48　圆球下沉速度曲线

小　结

本章讨论了无粘性不可压缩流体的无旋运动,特别是平面运动和空间轴对称运动. 作为一般的不可压缩流体的无旋运动,可以解速度势函数 φ 的拉普拉斯方程. 对于平面运动,也可以解流函数 ψ 的拉普拉斯方程. 由于平面运动的速度势 φ 和流函数 ψ 都满足拉普拉斯方程,且两者间还满足柯西－黎曼条件,因此构成复势函数. 我们可以利用奇点分布法、映像法和共形映照法求出复势及复速度,随后再利用伯努利方程求压强分布. 但是对于空间轴对称运动,虽然可引入斯托克斯流函数,但它所满足的不是拉普拉斯方程,因而一般是解速度势所满足的拉普拉斯方程,或者用奇点分布法求流函数和速度势.

值得注意的是所谓达朗伯佯谬:无界无粘性不可压缩流场中的柱体或有限物体,在不脱体定常绕流中无阻力. 这和实际是相悖的. 之所以造成这一佯谬,

主要是忽略了流体的粘性作用. 为此,在一定条件下考虑流体的粘性作用是必要的.

* 实验中的发现

(九) 达西定律

H. P. G. 达西(1803—1859)在巴黎受完普通教育以后,应父老乡亲们的要求,回到他的诞生地——迪乔恩市(Dijon),长期担任该市自来水系统的扩建与现代化工作. 他所遇到的困难问题之一就是需要设计与建造多大一个滤水池才能满足该市每天用水的需要. 当时常用的方法是用沙床滤水,但找不到可供参考的资料,于是他就自己做实验来解决这一问题.

他的实验设备包括一根长 3.5 m,直径 0.35 m 的垂直铁管,管的上、下两端各安装一法兰盘和一可以自由装卸的铁盖. 大约在距底端上方 0.2 m 处放一由铁架支撑的水平滤网,网的上方装有一定高度的矽沙. 在顶端的下方空间开两个孔并装上短管,一孔用长管与自来水龙头相连,并装一控制阀门,使实验用水能从上方流入垂直管内. 另一孔与一 U 形管相连,以便测量上方的压强. 在垂直管底端滤网以下的空间,也开两个孔并装上短管,一孔与另一 U 形水银管相连,以测量下方压强,另一孔则在短管上装一水龙头,以便将滤过的水排放至一测水池. 该池的水平截面积为 1 m^2,深度为 0.5 m.

达西用五个大小与厚度均不相同的沙床进行了一系列观察与测量. 对每一沙床,他又进行了一系列不同流量的实验,对每一流量他不仅测量了排出的水体积和所经历的时间,而且还纪录了上、下 U 形水银管中的水银高度差,并把它们换算成等价的水柱高度. 最后,将这些结果列成两个表,前一个是前四个沙床和后一个为第五个沙床的实验结果,它们分别是在 1855 年 10 月 29 日至 30 日和 1856 年 2 月 17 日至 18 日取得的.

通过分析,如果将这些实验结果画在一张坐标纸上,让纵向与横向坐标分别代表每单位时间的总流出量 Q_v 和上、下水柱高度之压强差(h_1-h_2),则流量与压降之间表现出很好的线性关系,但对不同的沙床直线的斜率是不同的,于是他把这些结果概括为

$$Q_v = KA\frac{h_1-h_2}{l} \quad 或 \quad q_v = \frac{Q_v}{A} = -K\frac{h_2-h_1}{l},$$

其中 A 为铁管横截面积,l 为沙床厚度,q_v 为每单位沙床横截面积的流量和 K 为一依赖于沙床渗透度的比例因子. 由于铁管的横截面积是均匀的,上式又可改写为

$$q_v = -K\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}l}.$$

这就是所谓的达西定律,它的含义是通过沙床每单位面积的流量与压降梯度成正比.

这一结果是在垂直的铁管中得到的.对于倾斜铁管这一结论是否也成立?实验证明当铁管倾斜于三维空间的任何方向时,达西定律均成立.更进一步,这一定律是在空间一维运动下得到的,它是否对三维空间运动也有效?实验表明只要三维沙床是均匀的,而且沙床中的空隙部分充满水.这些水可以是静止的,也可以作定常流动,达西定律也完全适用.

这样,达西定律就为从理论上解决石油、化工、天然气和地下水等领域中的多孔介质流体力学(或渗流)问题奠定了基础.

(十)附加质量

1786年P.L.G.杜布阿特在他的《水力学原理》一书中详细叙述了他在水中进行振荡圆球的阻力实验时,首先发现圆球的非定常阻力与它所挟带的流体质量有关.即圆球具有附加质量后应较它的真实质量为大.1828年F.W.贝塞尔进行摆的长度实验时,也观察到类似的现象,他还将物体质量所增加的惯性(即附加质量)用与物体同体积的流体质量的 n 倍来表示,并用球摆分别在空气与水中进行实验,所获得的 n 值为0.9与0.6,而杜布阿特在水中的值为 $n=0.585$.翌年,E.萨拜因又用球摆分别在氢气与空气中进行实验,结果发现它们的 n 值之比并不如人们所想像的是它们的密度之比,而是按1:5.25的比例.1832年F.贝利与1833年G.格林分别用各种大小的球摆,柱摆与椭球体进行了大量实验.

进入20世纪初期,为了研究运动物体(如船舶、飞船和水下物体)的非定常阻力,进一步开展了附加质量的研究.1928年E.B.莫林与A.D.布朗对半淹没物体,特别是任意矩形截面的长条体进行了实验,并给出了计算附加质量的近似方法.两年后,J.L.泰勒研究固壁、自由边界与流体压缩性对附加质量的影响,结论是固壁边界将增加 n 值,而流体的压缩性与沿自由边界作平行运动的物体将使 n 值略为减小.

在实验发现附加质量现象之后约50年,即1834年S.D.泊松首先从理论上探讨这一问题,他不考虑流体的粘性,分析球摆在空气中的阻力,得到的 n 值为0.5.杜布阿特与萨拜因均认为应考虑流体的粘性影响.1850年G.G.斯托克斯开始研究圆球在粘性流体中的附加质量问题,根据他的理论圆球的 n 值在0.53~0.56的范围内.但1923年N.C.克里席纳亚用振荡圆球在液体中所得到的较新 n 值为0.580~0.585,它与杜布阿特的 h 值相当一致.

习　题

本章习题若无另外说明,所指流体均为密度是常值 ρ 的无粘性不可压缩流体.

6.1　半径为 a 的无穷长直圆柱在静止流体中以常速 v_0 沿负 x 轴方向作匀速直线运动,不计重力,建立固连在柱体上的运动坐标系研究流体的绝对运动. (1)运动是否是无旋的? (2)若是无旋的,求流场速度势、柱体表面压强分布. 设无穷远处压强为 p_∞.

*6.2　证明(推导)6.1 节中所列速度势函数和无旋运动的性质及公式.

*6.3　无粘性不可压流体作定常平面运动,不计质量力,

(1) 证明流函数 ψ 和涡量 ω 满足方程

$$\frac{\partial(\omega,\psi)}{\partial(x,y)} = 0;$$

(2) 若 ω 是常数,证明

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} + \psi\omega = c \quad (\text{常数}).$$

6.4　已知平面流动流函数

$$\psi = \frac{Q}{2\pi}\left(\arctan\frac{y-2}{x+2} + \mathrm{tg}^{-1}\frac{y+2}{x-2}\right) + \frac{3}{8}\sqrt{2}(x^2+y^2),$$

判断是否是无旋流动.

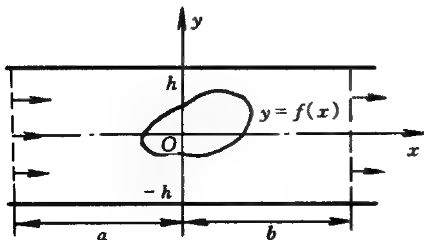
6.5　利用流函数 ψ 建立图示平面无旋流的方程以及边界条件.

6.6　不可压缩流体作平面定常运动,若速度场只是矢径 r 的函数,证明流函数 ψ 形式必为

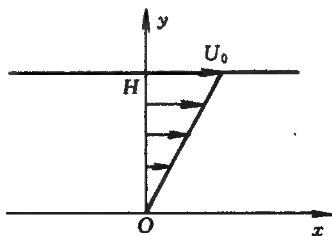
$$\psi = f(r) + k\theta,$$

式中 k 是常数. 若运动无旋,求速度势函数 φ.

6.7　对于两平板之间简单剪切流,如两板相距 H,下板固定,上板以 U_0 在自身平面匀速直线运动,试确定流函数方程,求流函数 ψ 以及两平板间体积流量 Q_V.



6.5 题图



6.7 题图

*6.8　对于可压缩的平面定常流动,引入流函数 $\psi(x,y)$, $u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial y}$, $v = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial x}$,证明涡量可表示为

$$\omega = \frac{\nabla\rho\cdot\nabla\psi}{\rho^2} - \frac{\nabla^2\psi}{\rho}.$$

同样,对于可压缩的轴对称定常流动,引入流函数 $\psi(r,z)$,$v_r = \frac{1}{\rho r}\frac{\partial\psi}{\partial z}$,$v_z = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial\psi}{\partial r}$,试导出 ω、ψ 和 ρ 所满足的关系式.

*6.9　证明(推导)6.2 节中所列不可压空间轴对称流动斯托克斯流函数的性质和公式.

*6.10　证明不可压缩流体空间轴对称流动的流函数方程为

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = -r\omega \quad (柱坐标),$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial R^2} - \frac{\cot\theta}{R^2}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} = -\sin\theta\cdot R\cdot\omega \quad (球坐标).$$

6.11　已知速度势 φ,求相应流函数 ψ:

(1) $\varphi = xy$;　　(2) $\varphi = x^3 - 3xy^2$;

(3) $\varphi = \dfrac{x}{x^2+y^2}$;　　(4) $\varphi = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$.

6.12　证明 $\varphi = \frac{1}{2}(x^2-y^2)+2x-3y$ 所表示的流场和 $\psi = xy+3x+2y$ 所表示的流场完全相同.

6.13　已知 $w = \ln\left(\dfrac{z}{z-2.5}\right)$,求沿 $|z| = 1.5$ 的环量 Γ 及通过该圆周的流量 Q_v.

6.14　已知平面无旋流的流函数或势函数,求相应的复势

(1) $\psi = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$;　　(2) $\psi = \ln(x^2+y^2)$;

(3) $\varphi = \dfrac{1}{r^2}\cos 2\theta$;　　(4) $\varphi = -U_0\left(r-\dfrac{a^2}{r}\right)\cos(\theta+\alpha)$.

6.15　已知流场复势是 $z = c\cos w(z)$,$(c>0)$,求:

(1) 流线族方程;　　(2) 等势线族方程;

(3) 画出流线族和等势线族图案.

6.16　已知流场复势是 $z = c\,\mathrm{ch}\,W(z)$,$(c>0)$,求:

(1) 流线族方程;　　(2) 等势线族方程;

(3) 画出流线族和等势线族图案.

6.17　在 $(a,0)$ 与 $(-a,0)$ 上放两个等强度点源,证明

(1) 在圆 $x^2+y^2=a^2$ 上任一点,速度均平行于 y 轴;

(2) 此速度大小与 y 成反比;

(3) y 轴为一流线.

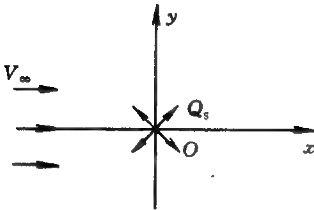
6.18　$z=-b$ 置一强度为 Q_s 的源,$z=b$ 置一强度为 Q_s 的汇. 如 $b\to\infty$,$Q_s\to\infty$,但 $\dfrac{Q_s}{b}\to\pi U_0$,U_0 是一有限值,那么流场复势就是速度为 U_0,方向与 x 轴平行的均匀直线流流场的复势. 试证明之.

6.19　如图所示,在速度为 V_∞ 的均匀来流流场中,若在原点处放置一流量为 Q_s 的源,求沿 x 轴的压强分布.

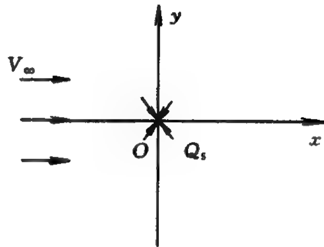
·6.20　如图所示，在速度为 V_∞ 的均匀来流流场中，若在原点处放置一强度为 Q_s 的汇，求：

(1) 驻点位置；　　(2) 过驻点流线；

(3) 沿着过驻点流线的速度与压强分布.



6.19 题图



6.20 题图

6.21　在$(a,0)$与$(-a,0)$分别放置一个汇和一个源，其强度均为 Q_s，且有一均匀来流，速度为 V_∞，平行于 x 轴，求驻点及过驻点的流线.

6.22　证明速度分量

$$u = V_\infty\left[1 - \frac{ay}{x^2+y^2} + \frac{b^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right],$$

$$v = V_\infty\left[\frac{ax}{x^2+y^2} + \frac{2b^2xy}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

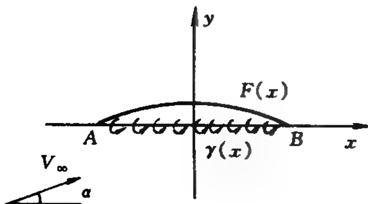
(式中 V_∞、a、b 为常数)代表一种不可压缩流体可能运动的速度分布，且流动是无旋的. 求复势，并讨论流场是哪几种奇点组合而成.

·6.23　在$(a,0)$，$(-a,0)$处放置强度为 Q_s 的点源，在$(0,a)$，$(0,-a)$处放置强度为 Q_s 的点汇，证明 $|z|=a$ 是流线.

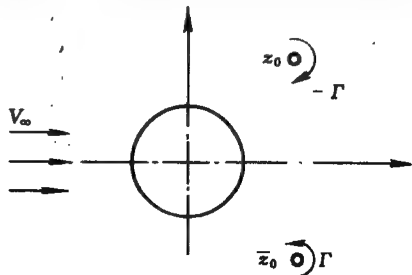
·6.24　绕薄翼的小冲角流动常可归结简化为小冲角绕过弧形翼型的流动，如图所示，并有绕流条件

$$u(x,\pm 0) = V_\infty\left(\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} - \alpha\right),$$

式中 $F(x)$是原薄翼的中线即现弧形翼型的曲线函数. 具体求解时采用涡层代替此翼型，设



6.24 题图



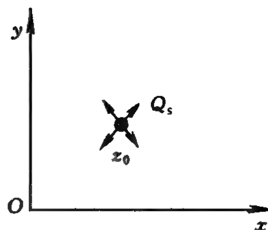
6.25 题图

涡密度分布是 $\gamma(x)$，导出确定 $\gamma(x)$ 的积分方程.

6.25　在速度为 V_∞ 的均匀来流流场中，放置一个半径为 a 的圆柱，并在 z_0 与 $\bar{z}_0$ 点各置一个强度相同方向相反的点涡，试求流场复势.

*6.26　求上题中形成驻涡的流动条件

6.27　在直角区域内的 z_0 处放置一个强度为 Q_s 的源，求流场复势和复速度.



6.27 题图

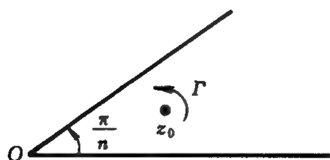
6.28　上半平面 $z_0 = bi$ 处有一强度为 M_t，方向为 α 的偶极子，$y=0$ 是固壁，求复势.

6.29　已知固壁边界 $\theta = -\frac{\pi}{4}$，$\theta = \frac{\pi}{4}$，在 $\theta = 0$，$r = a$ 处有一强度为 Q_s 的点源；在 $\theta = 0$，$r = b(b > a)$ 处有一强度为 Q_s 的汇，求流函数.

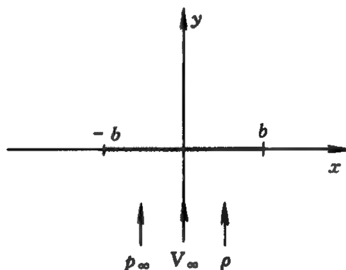
6.30　平面无旋流，用解析函数将物理平面变换到映射平面. 证明两个平面对应区域内流体动能没有改变.

6.31　图示角域内 $z = z_0$ 处有一点涡 Γ，求复势.

6.32　求图示不脱体绕流平板上下表面压强、压强系数和速度分布.



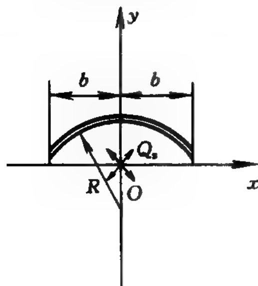
6.31 题图



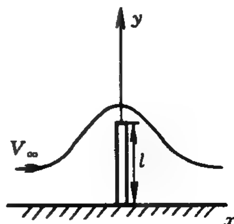
6.32 题图

6.33　大小 V_∞，方向 α 的均匀直线流无环量绕流长短半轴分别为 a 和 b 的椭圆，求复势、合力.

6.34　求图示流动复势.



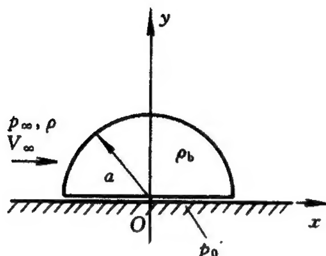
6.34 题图



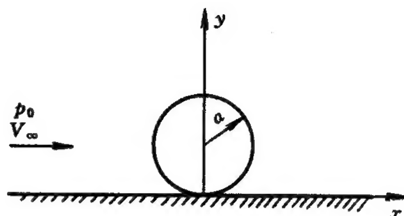
6.35 题图

6.35　图示流场,至少利用二种方法求流动复势.

6.36　密度为 ρ_b 的半直圆柱由于自重沉于水底,速度为 V_∞ 的均匀来流绕过此半直圆柱. 半圆柱与底面间有很小间隙,滞止压强是 p_0. 求能使半圆柱浮起的最小速度 V_∞.



6.36 题图



6.37 题图

*6.37　半径为 a 的圆木放在无穷长的平坦河床上,若河水来流流速为 V_∞,压强为 p_0,

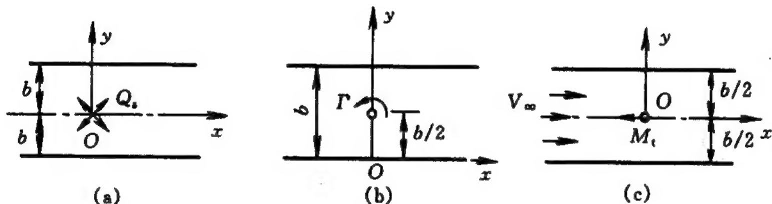
(1) 证明流动复势为

$$W=\pi a V_\infty \coth \frac{a\pi}{z};$$

(2) 求河床上压强;

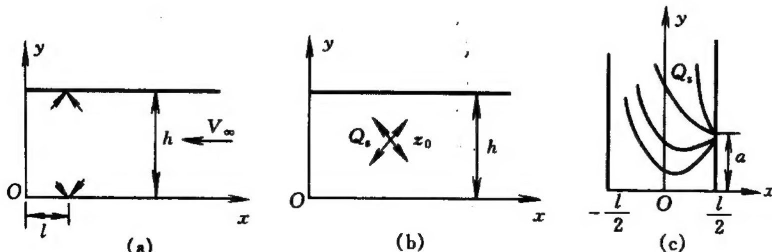
(3) 求圆木上压强.

*6.38　求图示无限长带形区域内流动复势.



6.38 题图

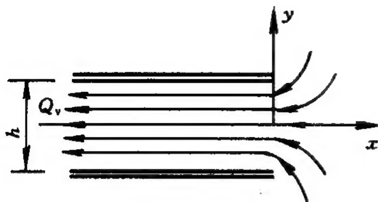
*6.39　求图示半无限长带形区域内流动复势.



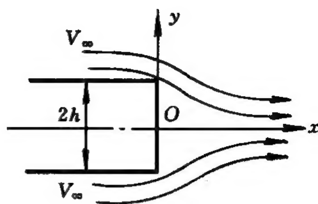
6.39 题图

*6.40　求图示渠道入口流的复势.

*6.41　求图示流场的复势.



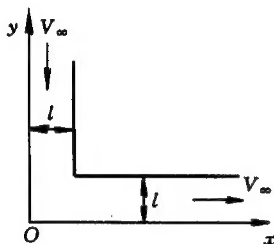
6.40 题图



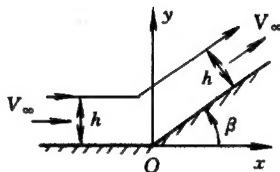
6.41 题图

*6.42　求图示直角弯管内流动复势.

*6.43　求图示角域内流动复势.



6.42 题图

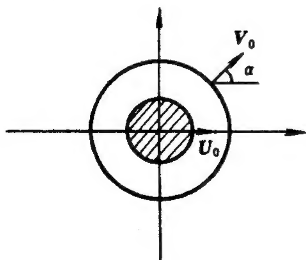


6.43 题图

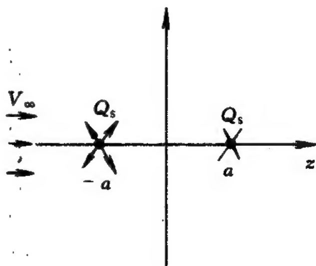
*6.44　建立静止坐标系分析半径为 a 的圆球以速度$v(t)$在无界流体中运动的流场. 无穷远流体静止,球心瞬时位置 r_0. 求流动速度势及压强 p.

*6.45　题 6.36 中半直圆柱改成半径为 a 的半球后求解.

*6.46　半径为 a 的圆球放在半径为 $b(b>a)$的球壳内,中间充满了无粘性不可压缩流体. 如图所示,两球同心,突然内球和外壳分别以 U_0 和 V_0 速度运动,求该瞬时流场速度势 φ.



6.46 题图



6.47 题图

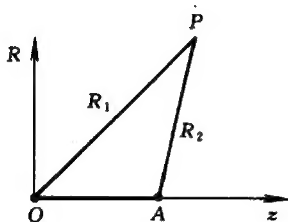
6.47　如图所示,在平行于 Oz 轴的三维均匀流场中,在 $z=-a$ 与 $z=a$ 处分别放置一个强度为 Q_s 的源与一个强度为 Q_s 的汇,求组合流场的

(1) 过驻点的流线，从而可看出这是什么物体的绕流；

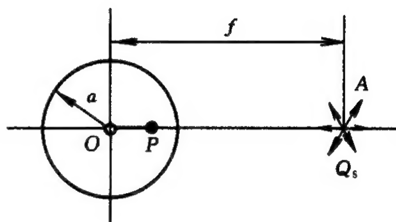
(2) 若此物体长半轴为 z_s，短半轴为 h，求两者之间联系式.

6.48　如图所示，在 Oz 轴的 OA 段分布有均匀线源，强度为$\frac{q}{a}$，a 是 OA 长度；在 OA 两端 O 点与 A 点放置强度相同汇，使全流场中流体不增多也不减少，求斯托克斯流函数 ψ.

*6.49　在半径为 a 的球外一点 A 放置一强度为 Q_s 的点源，A 点到球心距离为 f. 证明 A 点的源关于球面的映象是位于反演点处强度为$\frac{Q_s a}{f}$的源以及自球心到反演点单位长强度为$-\frac{Q_s}{a}$的线汇.



6.48 题图



6.49 题图

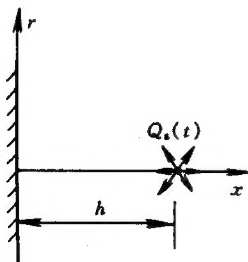
6.50　在离铅垂平面壁 h 处放置一强度为 $Q_s(t)$ 的点源，试求铅垂平板上压强分布. 设原流场是静止的，压强为 p_0.

6.51　在较深流体中一个半径为 a 的圆球以速度 v_0 与水平方向成$\frac{\pi}{4}$角方向上抛，若球密度是流体密度两倍，求能达到的最大高度 H_{max}.

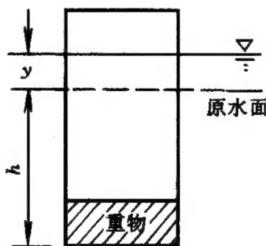
*6.52　从流体的动能定理考虑 6.8(三)非定常圆球绕流问题的非定常阻力.

(1) 由(6.8.40)式及流体动能速度势表达式求流体动能 $T(t)$.

(2) 由流体动能定理求非定常阻力.



6.50 题图



6.53 题图

*6.53　一个直径为 d 圆柱筒漂浮在静止水面上，圆柱筒底部装有重物使它始终保持垂直方向，且圆筒浸没在水中长度为 h. 现如使水面突然上升一微小高度 y_0，试确定圆柱筒的

运动$\left(设圆柱筒运动附加质量为\frac{1}{6}\rho d^3，且略去粘性阻力影响\right)$.

*6.54　半径为 a 的无穷长直圆柱在无穷静止流体中沿与柱轴垂直的方向作非定常直线运动，速度 $v(t)$，求流体对圆柱惯性阻力.